

Bernoulli-Gaussian 白噪声的 一种似然比检测方法¹⁾

高江

戴冠中

(西安交通大学系统工程研究所 西安 710049)

(西北工业大学自控系 西安 710072)

摘要 Bernoulli-Gaussian 白噪声的检测存在于具有跳变输入的 Kalman 滤波与最优平滑等问题中, 邻近信号间的干扰和信号点数目无限增多是其中存在的两个主要问题. 针对上述问题提出了一种基于最优平滑反卷积的 Bernoulli-Gaussian 白噪声检测方法和新的多值信号建模方法, 并基于固定区间平滑的频域性质和极大似然原理, 给出了一个最优似然比检测指标. 仿真表明, 该方法具有好的分辨率, 为存在波形重叠信号的高分辨检测提供了新的途径.

关键词 信号检测, 最优平滑, 极大似然估计, 似然比判据, 码间干扰

1 引言

在 Kalman 滤波及最优平滑等应用问题中, 有时会遇到具有跳变输入特性的系统, 如具有二进数值的通讯或测试信号^[1], 地震信号处理中地层的反射系数所组成的序列^[2]等. 为了达到最优估计性能, 需要对该多值序列的幅度及其出现的位置建模^[3], 这一问题通常称为多值检测.

本文讨论了输入为 Bernoulli-Gaussian 序列的线性非时变系统中的多值检测, 这类检测常应用于石油勘探的地震信号处理等问题中^[2].

设线性非时变系统模型为

$$z_k = h_k * u_k + n_k, \quad (1)$$

其中 $h_k = Z^{-1}[H(z)]$, 地层反射系数 u_k 为 Bernoulli-Gaussian 序列

$$u_k = q(k)r_k + w_k, \quad (2)$$

$q(k)$ 是 Bernoulli -1-0-1 序列,

$$\Pr[q(k)] = \begin{cases} 1 - \lambda, & q(k) = 0, \\ \lambda/2, & q(k) = 1, \\ \lambda/2, & q(k) = -1. \end{cases} \quad (3)$$

r_k, w_k, n_k 是相互独立的 Gaussian 白噪声序列, 满足

$$E[r_k] = a, E\{r_k - E[r_k]\}^2 = v_r, \quad (4)$$

1) 中国博士后科学基金资助项目.

收稿日期 1996-01-29

$$E[w_k] = 0, E[w_k^2] = v_w, E[n_k] = 0, E[n_k^2] = v_n. \quad (5)$$

$h_k, \lambda, a, v_r, v_w, v_n$ 均已知. 为了得到反射系数 u_k 的最优估计, 需要确定 $q(k), k=0, 1, 2, \dots, N$ 的值, $N+1$ 为观测序列的长度. 在地震信号处理问题中, 称 $q(k)=1$ 或 $q(k)=-1$ 时的输入信号 $q(k)r_k$ 为有效信号或强反射信号, 而 $q(k)=0$ 时的输入 w_k 为背景散射或弱反射信号. 在下面的推导中, 用这些术语分别表示输入序列中具有不同期望幅值的信号.

文献[1-5]对多值输入序列的检测问题进行了研究, 所提出的检测指标是基于系统的观测数据和极大似然原理. 与他们的方法不同, 本文首先得到 Bernoulli-Gaussian 序列 u_k 的最优平滑估计, 最大限度地消除系统传输通道模型的影响和相邻信号间的交叠, 在此基础上, 应用平滑估值的频域性质和极大似然原理得到最优似然比检测指标. 邻近信号的相互干扰是多值信号检测中的重要问题. 为解决这一问题, 文献[3]提出了一种逐次消去已检测出的信号的方法, 克服系统冲击响应重叠的影响. 文献[4]则采用了简化的似然比检测方法, 难以保证检测效果. 本文应用平滑反卷积的频域特性, 明确表示出相邻反射间的相互关联. 通过应用多点似然比指标, 可以有效地消除这种相互影响. 有效反射信号数目的确定被认为是与模型定阶类似的不存在一致估计的问题^[3,6], 文献[3]给出了基于 Rissanen 的最短数据表示原理的检测方法, 以更好地确定信号点的数目. 本文通过分析和仿真, 认为产生这种问题的原因在于通常的建模方法不能明确区分多值序列的特征, 本文所采用的多值建模方法可以有效避免信号点无限增多的问题.

2 最优平滑反卷积及其频域性质

为了消除系统传输通道模型对 Bernoulli-Gaussian 序列的影响, 首先做 u_k 的最优平滑估值. 由于(2)式中 $q(k)$ 未知, 取 u_k 的平均期望方差 \bar{v}_u 作为统计参数, 用最优平滑算法得到 u_k 的平滑估值 $\hat{u}(k|N)$. 为了由 $\hat{u}(k|N)$ 得出 u_k 的最优检测, 首先需要得到 u_k 与 $\hat{u}(k|N)$ 之间的关系. 为此, 给出平滑估值的如下频域性质.

引理 1^[7]. 令 $k \rightarrow \infty, N-k \rightarrow \infty$, 稳态固定区间最优平滑(反卷积)的输出 $\hat{u}(k|N)$ 可表示为

$$\hat{u}(k|N) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i z(k-i), \quad (6)$$

其中 $f_i (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为常数. 以 f_i 为冲击响应的双边滤波器的传递函数为

$$H_D(z) = \frac{\bar{v}_u H^*(z)}{\bar{v}_u |H(z)|^2 + v_n}. \quad (7)$$

其中 $H^*(z)$ 是 $H(z)$ 的共轭, $|H(z)|$ 是 $H(z)$ 的模.

引理 1 中的条件 $k \rightarrow \infty, N-k \rightarrow \infty$ 用于保证固定区间最优平滑进入稳态. 由引理 1 可知, 当 $k \rightarrow \infty, N-k \rightarrow \infty$ 时, 稳态最优固定区间平滑反卷积器输出的 z 变换为

$$\hat{U}(z) = \frac{\bar{v}_u |H(z)|^2}{\bar{v}_u |H(z)|^2 + v_n} U(z) + \frac{v_n H^*(z)}{\bar{v}_u |H(z)|^2 + v_n} N(z). \quad (8)$$

其中 $U(z), N(z)$ 分别是系统输入 u_k 与测量噪声 n_k 的频域变换. 令

$$R_D(z) = \frac{\bar{v}_u |H(z)|^2}{\bar{v}_u |H(z)|^2 + v_n}, \quad H_D(z) = \frac{\bar{v}_u H^*(z)}{\bar{v}_u |H(z)|^2 + v_n}, \quad (9a), (9b)$$

并设 $R_D(z)$ 与 $H_D(z)$ 的冲击响应为

$$Z^{-1}[R_D(z)] = r_D(k), \quad Z^{-1}[H_D(z)] = h_D(k), \quad (10a), (10b)$$

则(8)式可以写为

$$\hat{u}(k|N) = r_D(0)u_k + \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} r_D(i)u_{k-i} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_D(i)n_{k-i}. \quad (11)$$

且(11)式右端的三项相互统计无关.

一般地,由最优固定区间平滑理论知,当 k 与 $N-k$ 为足够大的有限整数时,固定区间最优平滑近似进入稳态,此时,以 z_k 为输入, $\hat{u}(k|N)$ 为输出的稳态固定区间最优平滑(反卷积)器的冲击响应近似为(7)式传递函数冲击响应的有限项截断. 在(11)式中截去 $u_k, n_k, k \in [0, N]$ 的各项,得到

$$\hat{u}(k|N) = r_D(0)u_k + \sum_{\substack{i=k-N \\ i \neq 0}}^k r_D(i)u_{k-i} + \sum_{i=k-N}^k h_D(i)n_{k-i}. \quad (12)$$

根据上述讨论,稳态平滑反卷积输出 $\hat{u}(k|N)$ 与 u_k, n_k 的关系由 $R_D(z)$ 和 $H_D(z)$ 决定. 由于 R_D 不是一个单位脉冲函数,因此在 $\hat{u}(k|N)$ 中,相距很近的强反射会互相干扰,如图 1 所示,其中 \circ 代表强反射信号的位置和幅值, $|$ 为最优平滑反卷积实际输出的结果. 为此,本文给出一个综合考虑这种效应的多点似然比检测指标.

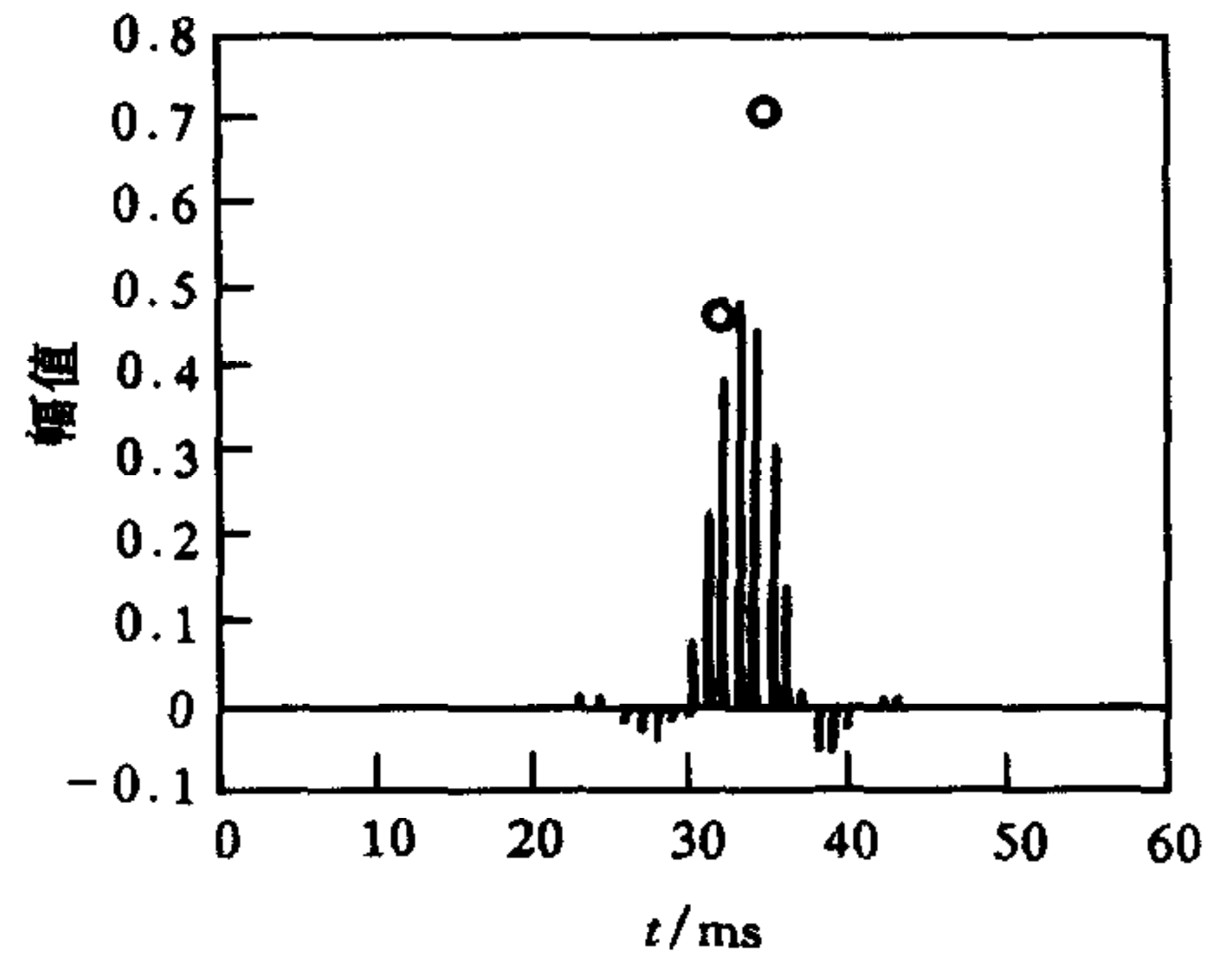


图 1 两个相互靠近的强反射信号间的交叠干扰

3 似然比检测器的推导

设所关心的时间区间为 $k \in [0, N]$, 令

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \text{col}(\hat{u}(0|N), \hat{u}(1|N), \dots, \hat{u}(N|N)), \quad r = \text{col}(r_0, r_1, \dots, r_N), \\ w &= \text{col}(w_0, w_1, \dots, w_N), \quad n = \text{col}(n_0, n_1, \dots, n_N), \end{aligned} \quad (13)$$

则由(12)式, \hat{u} 可表示为

$$\hat{u} = WQ_q r + Ww + Vn. \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} r_D(0) & r_D(-1) & \dots & r_D(-N) \\ r_D(1) & r_D(0) & \dots & r_D(-N+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_D(N) & r_D(N-1) & \dots & r_D(0) \end{bmatrix}, \\ V &= \begin{bmatrix} h_D(0) & h_D(-1) & \dots & h_D(-N) \\ h_D(1) & h_D(0) & \dots & h_D(-N+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ h_D(N) & h_D(N-1) & \dots & h_D(0) \end{bmatrix}, \\ Q_q &= \text{diag}(q(0), q(1), \dots, q(N)). \end{aligned} \quad (15)$$

由(14)式和系统统计假设可知 \hat{u} 符合高斯分布,其协方差矩阵为

$$P_q = v_r W A_q W' + v_w W W' + v_n V V' . \quad (16)$$

其中

$$A_q = \text{diag}(|q(0)|, |q(1)|, \dots, |q(N)|) .$$

因此,已知 $\hat{u}, q(i), i \in [0, N]$ 的似然函数为

$$L[q(i), i \in [0, N] | \hat{u}] = p[\hat{u} | q(i), i \in [0, N]] \Pr[q(i), i \in [0, N]] , \quad (17)$$

其中

$$p[\hat{u} | q(i), i \in [0, N]] = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N+1} |P_q|}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\hat{u} - m_q)' P_q^{-1} (\hat{u} - m_q) \right],$$

$$m_q = E[\hat{u}], \Pr[q(i), i \in [0, N]] = \lambda^{S_q} (1 - \lambda)^{1 - S_q}, S_q = \sum_{i=0}^N |q(i)| . \quad (18)$$

另一种常用于 $q(k)$ 的验前分布未知情况的似然函数(称为条件(conditional)似然函数)为

$$L[q(i), i \in [0, N] | \hat{u}] = p[\hat{u} | q(i), i \in [0, N]] . \quad (19)$$

$q(k)$ 的最优检测应是使得似然函数取值最大,或表示为如下的似然比判据.

定理 1. 已知 \hat{u} , 则 $q(i), i \in [0, N]$ 的最优似然比估计为 $q^*(i), i \in [0, N]$, $q^*(i)$ 为 -1-1-0 为序列,使得恒有

$$N(q^*, q_c) = \frac{L[q^*(i), i \in [0, N] | \hat{u}]}{L[q_c(i), i \in [0, N] | \hat{u}]} \geq 1 . \quad (20)$$

其中 $L[q_c(i), i \in [0, N] | \hat{u}], L[q^*(i), i \in [0, N] | \hat{u}]$ 是 $q_c(i)$ 与 $q^*(i)$ 的似然函数, $q_c(i)$ 取遍 -1-1-0 序列的所有组合.

(20)式也可以用对数似然比指标表示为

$$\begin{aligned} \Lambda &= \ln N(q^*, q_c) = L[q^*(i), i \in [0, N] | \hat{u}] - L[q_c(i), i \in [0, N] | \hat{u}] \\ &= \frac{1}{2} \ln |P_{q_c}| - \frac{1}{2} \ln |P_{q^*}| + \frac{1}{2} (\hat{u} - m_{q_c})' P_{q_c}^{-1} (\hat{u} - m_{q_c}) - \frac{1}{2} (\hat{u} - m_{q^*})' \\ &\quad P_{q^*}^{-1} (\hat{u} - m_{q^*}) + (S_{q^*} - S_{q_c}) \ln \left(\frac{\lambda}{1 - \lambda} \right) \geq 0 . \end{aligned} \quad (21)$$

对应于(19)式似然函数的对数似然比指标为

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \ln N(q^*, q_c) = \frac{1}{2} \ln |P_{q_c}| - \frac{1}{2} \ln |P_{q^*}| \\ &\quad + \frac{1}{2} (\hat{u} - m_{q_c})' P_{q_c}^{-1} (\hat{u} - m_{q_c}) - \frac{1}{2} (\hat{u} - m_{q^*})' P_{q^*}^{-1} (\hat{u} - m_{q^*}) \geq 0 . \end{aligned} \quad (22)$$

4 仿真

本节对定理 1 给出的最优似然比检测指标作仿真研究. 取 5 个样点的局部时区,设在此时区外 $q(k)$ 均已知,并且仅考虑最易产生误检的 $q(k)=1, q(k)=0$ 相间(即图 1 所示)的情况. 由(12)式可见,此局部时区内的 \hat{u} 与整个观测数据段时间内的 u_k 均有关,要得到 $q(k)$ 的最优似然比检测需要考虑整个时区的 $u_k, k \in [0, N]$. 显然,从计算量的角度考虑这是不切实际的. 可以证明,一般情况下 $r_D(k)$ 与 $h_D(k)$ 的幅值随 $|k|$ 的增大而迅速下降,因此当仅研究局部区段上的 $q(k)$ 时,可以认为 \hat{u} 的方差主要由几个邻近的 u_k 决定,则

(12)式很好的近似为

$$\hat{u}(k|N) = r_D(0)u_k + \sum_{\substack{i=-L \\ i \neq 0}}^L r_D(i)u_{k-i} + \sum_{i=-M}^M h_D(i)n_{k-i} \quad (23)$$

L, M 是足够大的正整数.

设系统传递函数为

$$H(z) = \frac{0.037\ 841\ 7z^{-1} - 0.030\ 651\ 7z^{-3}}{1 - 3.401\ 649\ 7z^{-1} + 4.511\ 373\ 2z^{-2} - 2.755\ 336\ 3z^{-3} + 0.6561z^{-4}} \quad (24)$$

输入取为(2-5)式给出的 Bernoulli-Gaussian 序列,期望值分别为 $E[r_k]=1, E[w_k]=0$, 方差分别为 $E[r_k^2]=0.4, E[w_k^2]=0.2, \lambda=0.1$. n_k 是方差为 $E[n_k^2]=0.03$ 的零均值高斯白噪. 首先对该序列进行平滑反卷积,结果如图 3(a)实线所示. 研究 105-109 点共 5 点的局部时区,在此时区的 106 和 108 点

处有间隔仅一点的两个 $q(k)=1$ 的强反射点,幅值分别为 1.177 4,0.773 2, 其余各点 $q(k)=0$. 用上面给出的对数似然比指标(22)式检测,以真实序列 [01010]为参考序列 $q^*(i)$, $q_c(i)$ 取遍 0-1 序列的所有组合,所得的对数似然比 $\Lambda_1 = \ln N(q^*, q_c)$ 如表 1 和图 2 所示,图 2 中横座标为代表 $q_c(k)$ 的二进制序列的数值(十进制),纵座标为对数似然比. $q_c(k)$ 取 0-1 序列的所有组合. 图 3 给出似然比最大的两个 0-1 组合序列所对应的反卷积输出期望值与真实反卷积输出的比较,其中实线为反卷积输出. 虚线为期望值,对应的序列分别为 $q=[0,1,0,1,0]$ 和 $q=[0,1,1,0,0]$.

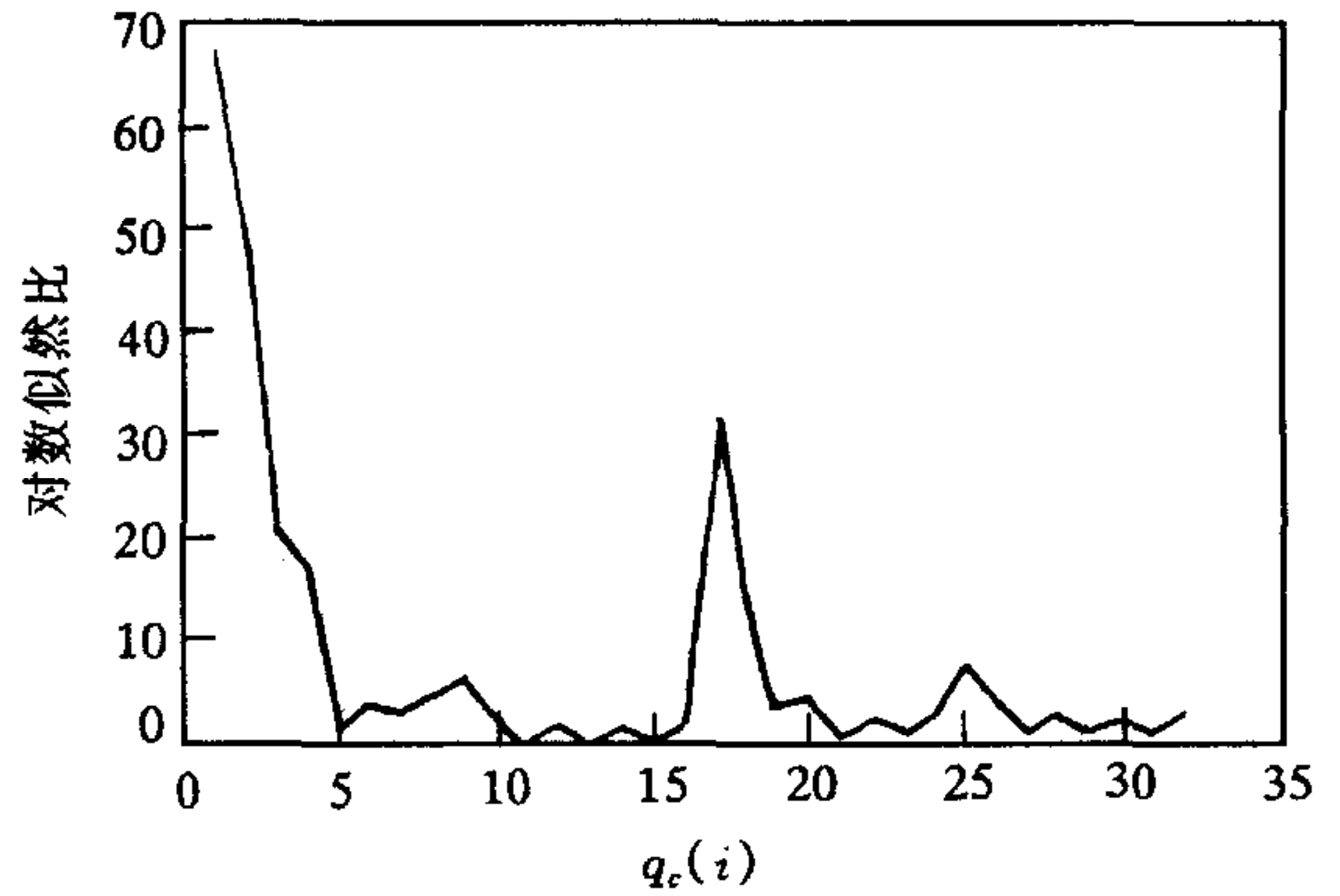


图 2 对数似然比

表 1 对数似然比指标

序列 $q_c(k)$	00000	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111
对数似然比	67.697 1	47.969 6	20.737 5	17.590 0	1.271 1	3.946 7	3.269 9	4.815 6
序列 $q_c(k)$	01000	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111
对数似然比	6.544 5	2.425 2	0	1.591 4	0.020 0	1.482 8	0.412 7	1.923 1
序列 $q_c(k)$	10 000	10 001	10 010	10 011	10 100	01 101	10 110	10111
对数似然比	31.261 1	14.934 4	3.409 6	4.520 4	0.531 4	2.396 5	1.190 1	2.737 3
序列 $q_c(k)$	11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
对数似然比	7.575 9	4.137 7	1.248 9	2.810 1	1.156 0	2.607 1	1.373 4	2.892 7

注意到本例中有效反射点的数目得到了精确的估计. 这是由多值序列的建模方法所决定的. 文献[2,3]给出的多值信号分别是以零为中心的正态分布随机变量,仅存在方差的不同. 由于零值附近是多值信号出现概率最大的公共区域,因此噪声所引起的系统

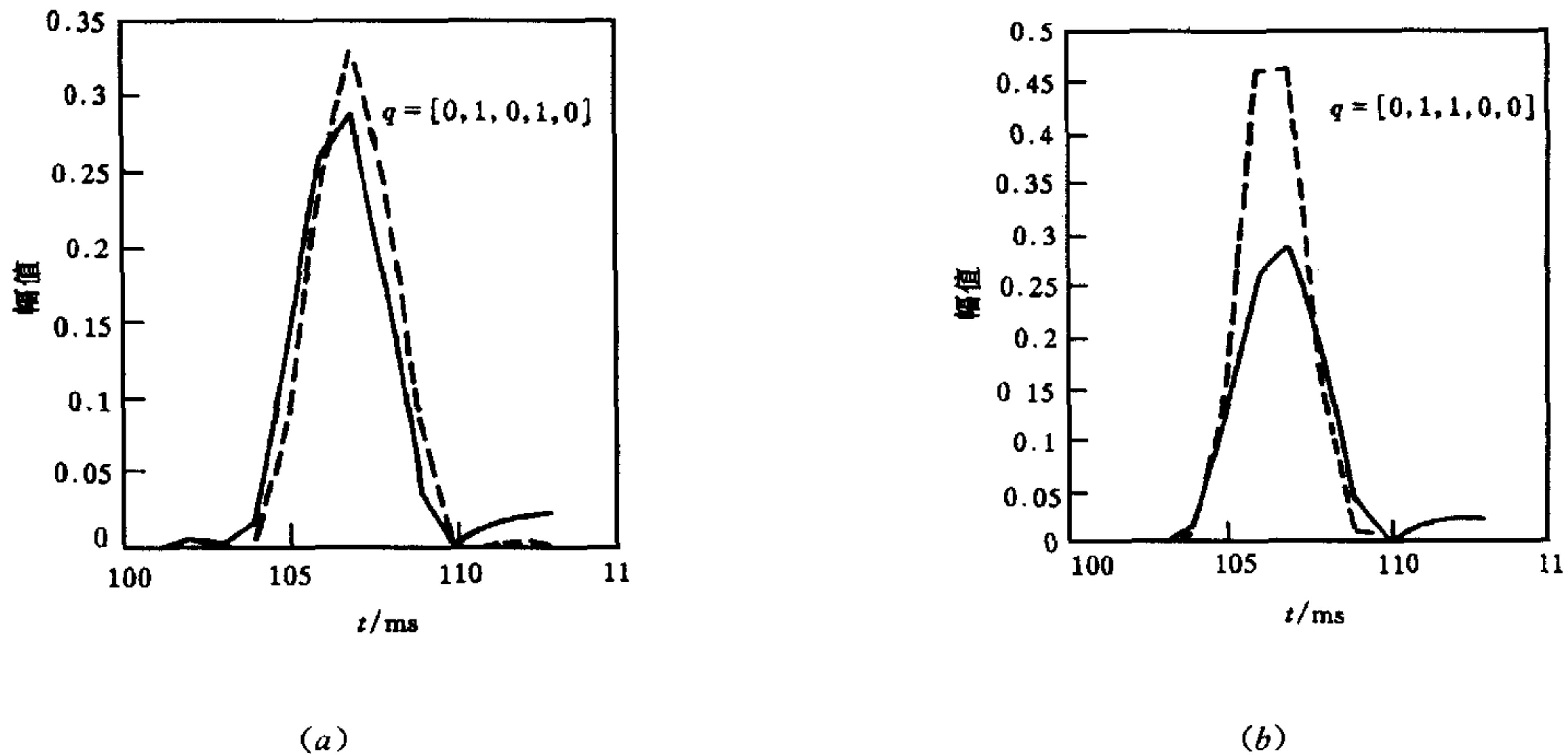


图 3 实际值与期望值的比较

观测输出扰动很容易被误检为有效信号,从而造成有效信号点数目无限增大.并且由于出现信号间的混淆,特征相似的几类信号也难以区分,成为漏检与误检的首要原因.有关上述问题的描述详见文献[3].本文的建模方法通过对多值信号设定不同的期望值(3-5)式),在很大程度上减小了信号特征交叠的概率,因此大大降低了这类问题出现的概率,并且能检出的有效信号范围也未受损失.

5 结论

应用最优平滑的频率域性质,给出了一种多值时间序列的最优似然比检测方法,可应用于近距分辨率检测中.仿真表明,这种方法具有很好的分辨率,为存在波形重叠信号的高分辨检测提供了一种新途径.

本文所给出的是一种最优似然比检测方法.由推导和仿真可以看出,这种方法需要比较多值序列的所有组合,在实际应用中运算量很大.为同时保证算法的速度和精度,可以应用检测理论中的多种次优方法在运算量和检测性能之间求得均衡.这一类次优检测方法包括 SMLR,即每次仅允许一个时间点上的值变化;SSS,脉冲移位检测等^[2].这些算法可以由最优似然比指标(21,22)式推出,这里不再给出.

参 考 文 献

- 1 Van Trees H L. Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1968
- 2 Mendel J M. Optimal Seismic Deconvolution: An Estimation Based Approach. New York: Academic Press, 1983
- 3 Kwakernaak H. Estimation of pulse heights and arrival times. *Automatica*, 1980, **16**:367-377
- 4 Lichtenstein M G, Young T Y. The resolution of closely spaced signals. *IEEE Trans. Information Theory*, 1968, **14**(2):288-293
- 5 Kormylo J, Mendel J M. Maximum-likelihood detection and estimation of Bernoulli-Gaussian processes. *IEEE Trans. Information Theory*, 1982, **28**:482-488
- 6 Akaike H. A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans. Automatic Control*, **19**:716-722

- 7 Wiener N. Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, with Engineering Applications. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1949

OPTIMAL LIKELIHOOD-RATIO DETECTION OF BERNOULLI-GAUSSIAN PROCESSES

GAO JIANG

(Institute of systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

DAI GUANZHONG

(Dept. of Automatic Control, Northwestern Polytechnic University, Xi'an 710072)

Abstract In detection of Bernoulli-Gaussian processes for Kalman filtering and optimal smoothing with jumping input sequences, two main traditional difficulties are the interference from adjacent signals and the infinite increase of the number of detected signals. To solve these problems, a new detection method based on optimal deconvolution and a new modeling strategy for the multi-valued input signals are proposed. Then, based on the frequency-domain properties of fixed-interval optimal smoothing and maximum-likelihood principle, an optimal likelihood-ratio detection index is derived. Simulation shows that the proposed method has high resolution and is a good candidate for the detection of signals with intersymbol interference.

Key words Detection, optimal smoothing, maximum-likelihood estimation, likelihood-ratio index, intersymbol interference

高 江 1969年生。1990年毕业于西安交通大学信息与控制工程系,获学士学位,1996年于西北工业大学自动控制系获博士学位,现在西安交通大学做博士后研究。感兴趣的领域有估计与辨识,数字信号处理及其并行化,计算机视觉,工业生产过程的调度,监控与仿真等。

戴冠中 作者简介见本刊第21卷第6期。