第24卷 第3期 1998年5月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 24, No. 3 May., 1998

短 文

具有多状态滞后的不确定时变时滞系统的鲁棒镇定[1)]

曹永岩 孙优贤
(浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027)

摘 要 首先给出了具有多状态滞后的时变时滞系统渐近稳定的代数 Riccati 不等式形式的判据，并基于此给出了确定性时变时滞系统的镇定方法. 然后给出了具有有界参数不确定性的多状态滞后时变时滞系统的镇定方法. 文中的结论非常简单，只需解一个代数 Riccati 方程. 最后给出一个算例.

关键词 不确定时滞系统，时变时滞，鲁棒镇定，无记忆状态反馈.

1 引言

近年来，不确定时滞系统的鲁棒控制引起广大学者的关注，并得出了许多可喜的结果，提出了一些有用的方法，如有限谱配置、最优控制、变结构控制等[1-3]. 但这些方法均不很理想，时滞系统的研究仍是控制理论中的一个热门课题.

2 确定性时变时滞系统的稳定与镇定

考虑如下具有多状态滞后的不确定时变时滞系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A_0+\Delta A_0(r_0)]\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{q}[A_i+\Delta A_i(r_i)]\boldsymbol{x}(t-h_i(t))+$$
$$[B+\Delta B(r_{q+1})]\boldsymbol{u}(t), \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t), \forall\, t\in[-h_{\max},0) \tag{1b}$$

的鲁棒稳定. 式中 $\boldsymbol{x}\in R^n$, $\boldsymbol{u}\in R^m$ 分别表示状态及输入矢量；$r_i(t)\in\Omega_i\subset R^{p_i}(i=0,\cdots,q+1)$表示不确定元素，且是 Lebsgue 可测的，$\Omega_i$ 是相应空间中的紧子集；A_0,B,A_i 为合适维数的常矩阵；$\Delta A_0(\cdot),\Delta A_i(\cdot),\Delta B(\cdot)$为"$\cdot$"的函数，表示系统的的不确定性；$\boldsymbol{\varphi}(t)$是一个连续的矢量初值函数；$h_i(t)(i=1,\cdots,q)$表示有界时变时滞，且

$$0<h_i(t)\leqslant h_i<\infty,\ \dot{h}_i(t)\leqslant d_i<1, \tag{2}$$

$$h_{\max}=\max_i(h_i), d_{\max}=\max_i(d_i), \tag{3}$$

1) 国家自然科学基金资助课题.
收稿日期 1995-11-20

式中 h_i,d_i 均为常数. 本文假定(A_0,B)可控.

首先,研究确定性时变时滞自治系统(即 $\boldsymbol{u}(t)=0$)的稳定性.

定理1. 给定对称矩阵 $Q_i>0, i=1,\cdots,q$, 若存在 $P>0$满足

$$S_1 = A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + \sum_{i=1}^{q} PA_i\hat{Q}_i^{-1}A_i^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{q} Q_i < 0, \tag{4}$$

$$\hat{Q}_i = (1-d_i)Q_i, i = 1,\cdots,q, \tag{5}$$

则确定性时变时滞系统(3)独立时滞渐近稳定.

证明. 构造 Lyapunov 泛函

$$V(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{q}\int_{t-h_i(t)}^{t} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\sigma)Q_i\boldsymbol{x}(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

经简单的推导不难发现

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x}) \leqslant \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)TST^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t),$$

$$\boldsymbol{z}(t) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_1(t)),\cdots,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_q(t))]^{\mathrm{T}},$$

$$T = \begin{bmatrix} I_n & -PA_1\hat{Q}_1^{-1} & \cdots & -PA_q\hat{Q}_q^{-1} \\ 0 & I_n & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_n \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\hat{Q}_1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\hat{Q}_q \end{bmatrix}.$$

显然有 $TST^{\mathrm{T}}<0$当且仅当 $S_1<0$,因此 $S_1<0$时,$\dot{V}(t,\boldsymbol{x})<-\alpha\|\boldsymbol{x}(t)\|^2, \forall\ \boldsymbol{x}\neq 0$,$\alpha$ 为一大于零的常数. 证毕.

系1. 如果存在常数 $\alpha>\frac{q}{\varepsilon}>0$使得如下 ARE

$$A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + \sum_{i=1}^{q}\frac{\varepsilon}{(1-d_i)}PA_iA_i^{\mathrm{T}}P + \alpha I_n = 0 \tag{6}$$

具有唯一正定解 P,则确定性时变时滞自治系统(3)渐近稳定.

当系统中没有时滞项,即 $A_i=0$时,式(4)就是 Lyapunov 不等式;当 $q=1$时,文[1]也得到了该式. 定理1可以看作是 Lyapunov 稳定性定理在时滞系统中的推广.

定理2. 如果存在常数 $\rho>0$,对称矩阵 $P>0$满足

$$A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 - 2\rho PBB^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{q} PA_i\hat{Q}_i^{-1}A_i^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{q}Q_i < 0, \tag{7}$$

其中 $Q_i>0(i=1,\cdots,q)$,则无记忆状态反馈控制律

$$\boldsymbol{u}(t) = -\rho B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t), \rho>0 \tag{8}$$

镇定确定性时变时滞系统(1).

根据定理1很容易证明本定理.

3 不确定多状态滞后时变时滞系统的鲁棒镇定

定理3. 若存在常数 $\varepsilon>0,\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0,\rho>0$,以及矩阵 $P>0$满足 Riccati 不等式

$$M_1 \triangleq A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 - P(\rho T - \varepsilon S - \varepsilon_1 I_n)P + Q < 0, \tag{9}$$

则状态反馈控制律(8)镇定不确定时滞系统(1),式中

$$Q \geqslant \frac{1}{\varepsilon_1}\Delta A_0(r_0)\Delta A_0^{\mathrm{T}}(r_0) + \frac{q}{\varepsilon}I_n, \forall\, r_0 \tag{10a}$$

$$S \geqslant \sum_{i=1}^{q} \frac{1+1/\varepsilon_2}{1-d_i}\Delta A_i(r_i)\Delta A_i^{\mathrm{T}}(r_i) + \sum_{i=1}^{q}\frac{1+\varepsilon_2}{1-d_i}A_iA_i^{\mathrm{T}}, \forall\, r_i, i=1,\cdots,q, \tag{10b}$$

$$T \leqslant B\Delta B^{\mathrm{T}}(r_{q+1}) + \Delta B(r_{q+1})B^{\mathrm{T}} + 2BB^{\mathrm{T}}, \forall\, r_{q+1} \tag{10c}$$

证明. 此时闭环系统方程为

$$\dot{x}(t) = [A_0 + \Delta A_0 - \rho(B+\Delta B)B^{\mathrm{T}}P]x + \sum_{i=1}^{q}(A_i+\Delta A_i)x(t-h_i),$$

由定理1可知，闭环系统渐近稳定的一个充分条件是存在 $Q_i>0(i=1,\cdots,q)$ 满足

$$M_0 = A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + P\Delta A_0 + \Delta A_0^{\mathrm{T}}P - \rho P(2BB^{\mathrm{T}} + B\Delta B^{\mathrm{T}} + \Delta BB^{\mathrm{T}})P + \sum_{i=1}^{q}P(A_i+\Delta A_i)\hat{Q}_i^{-1}(A_i+\Delta A_i)^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{q}Q_i < 0.$$

因为对于任意 $m\times n$ 实矩阵 X,Y 有

$$X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leqslant \alpha X^{T}X + \frac{1}{\alpha}Y^{\mathrm{T}}Y, \alpha>0, \tag{11}$$

取 $Q_i=\frac{1}{\varepsilon}I_n, i=1,\cdots,q$，有

$$M_0 \leqslant A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + \varepsilon_1PP + \frac{1}{\varepsilon_1}\Delta A_0^{\mathrm{T}}\Delta A_0 - \rho P(2BB^{\mathrm{T}} + B\Delta B^{\mathrm{T}} + \Delta BB^{\mathrm{T}})P + \sum_{i=1}^{q}\frac{\varepsilon}{1-d_i}[(1+\varepsilon_2)PA_iA_i^{\mathrm{T}}P + (1+\frac{1}{\varepsilon_2})P\Delta A_i\Delta A_i^{\mathrm{T}}P] + \frac{q}{\varepsilon}I_n \leqslant M_1.$$

显然，如果 $M_1<0$，则 $M_0<0$.　证毕.

系2. 若存在常数 $\alpha>\frac{q}{\varepsilon}>0, \varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0, \rho>0$，对称矩阵

$$Q \geqslant \frac{1}{\varepsilon_1}\Delta A_0(r_0)\Delta A_0^{\mathrm{T}}(r_0) + \alpha I_n, \quad \forall r_0,$$

使得 ARE

$$A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 - P(\rho T - \varepsilon S - \varepsilon_1 I_n)P + Q = 0 \tag{12}$$

存在唯一正定解 P，则状态反馈控制律(8)镇定不确定时滞系统(1).

若假定不确定性 $\Delta A_0, \Delta A_i, \Delta B$ 满足匹配条件，即

$$\Delta A_0(r_0) = BD(r_0), \quad \Delta A_i(r_i) = BE_i(r_i), \quad \Delta B(r_{q+1}) = BF(r_{q+1}). \tag{13}$$

假设

$$2I_m + F(r_{q+1}) + F^{\mathrm{T}}(r_{q+1}) \geqslant \delta I_m, \delta>0, \quad \forall r_{q+1}. \tag{14}$$

定理4. 若存在常数 $\varepsilon>0, \varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0, \rho>\frac{\varepsilon_1+(1+\varepsilon_2)\beta\varepsilon}{\delta}$，以及矩阵 $P>0$ 满足

$$M_2 \triangleq A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 - (\rho\delta - \varepsilon_1 - (1+\varepsilon_2)\beta\varepsilon)PBB^{\mathrm{T}}P + \sum_{i=1}^{q}\frac{\varepsilon(1+1/\varepsilon_2)}{1-d_i}PA_iA_i^{\mathrm{T}}P + Q < 0, \tag{17}$$

则状态反馈控制律(8)镇定满足匹配条件的不确定时滞系统(1)，其中

$$Q \geqslant \frac{1}{\varepsilon_1}D^{\mathrm{T}}(r_0)D(r_0) + \frac{q}{\varepsilon}I_n, \varepsilon>0, \quad \forall r_0, \tag{18}$$

$$\beta = \max_{\forall r_i} \| \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{(1-d_i)} E_i(r_i) E_i^{\mathrm{T}}(r_i) \|. \tag{19}$$

证明. 类似于定理3可知，闭环系统渐近稳定的一个充分条件是存在 $Q_i>0$满足

$$M_0 = A_0^T P + P A_0 + PBD + D^T B^T P - \rho PB(2I_m + F + F^T) B^T P + \sum_{i=1}^{q} P(A_i + BE_i) \hat{Q}_i^{-1} (BE_i + A_i)^T P + \sum_{i=1}^{q} Q_i < 0.$$

取 $Q_i = \frac{1}{\varepsilon} I_n$,并注意到式(11)可知上式左边满足

$$M_0 \leqslant A_0^T P + P A_0 + \varepsilon_1 PBB^T P + \frac{1}{\varepsilon_1} D^T D - \rho PB(2I_m + F + F^T) B^T P + \frac{q}{\varepsilon} I_n + (1 + \frac{1}{\varepsilon_2}) \varepsilon \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{(1-d_i)} P A_i A_i^T P + (1+\varepsilon_2) \varepsilon \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{(1-d_i)} PBE_i E_i^T B^T P \leqslant M_2$$

显然,如果 $M_2<0$,则 $M_0<0$. 证毕.

系3. 若存在常数 $\alpha > \frac{q}{\varepsilon} > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0, \rho > \frac{\varepsilon_1 + (1+\varepsilon_2)\beta\varepsilon}{\delta}$,对称矩阵 Q 满足

$$Q \geqslant \frac{1}{\varepsilon_1} D^T(r_0) D(r_0) + \alpha I, \forall\, r_0, \tag{20}$$

使得 ARE

$$A_0^T P + P A_0 - (\rho\delta - \varepsilon_1 - (1+\varepsilon_2)\beta\varepsilon) PBB^T P + \sum_{i=1}^{q} \frac{\varepsilon(1 + 1/\varepsilon_2)}{1-d_i} P A_i A_i^T P + Q = 0 \tag{21}$$

存在唯一正定解,则状态反馈控制律(8)镇定满足匹配条件的不确定时滞系统(1).

系4. 若存在常数 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon > 0, \rho > \frac{\varepsilon_1}{\delta}$,对称矩阵 $P>0$是如下 ARE 的唯一正定解

$$A_0^T P + P A_0 - (\rho\delta - \varepsilon_1) PBB^T P + Q = 0, \tag{22}$$

则状态反馈控制律(8)镇定没有时滞项的不确定系统(1). 其中

$$Q \geqslant \frac{1}{\varepsilon_1} D^T(r_0) D(r_0) + \frac{1}{\varepsilon} I_n, \forall\, r_0. \tag{23}$$

本结论的另外一种形式就是文[4]的定理3.1,定理4实质上是文[4]的结论在不确定时滞系统中的推广. 常矩阵 Q,S,T 可按文[4]给出的几种方法进行确定,正常数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$的确定原则是使得式(11)的等号尽可能成立,这样可以降低所设计的控制器的保守性,通常可以取为1.

4 示例

考虑不确定时变时滞系统(1),

其中 $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $h(t) = u|\cos(\omega t)|$,

$\Delta A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2\sin(t) \\ 0 & 0.1\sin(t) \end{bmatrix}$, $\Delta A_1 = \begin{bmatrix} 0.2\cos(t) & 0 \\ 0.1\cos(t) & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1\sin(t) \end{bmatrix}$.

使用本文的方法,令 $\varepsilon=1$, $\alpha=2$, $\varepsilon_1=0.01$, $\varepsilon_2=1$, $\rho=5$, $d_1=0.5$,可以确定

$$Q = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.04 \\ -0.04 & 0.56 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.8 \end{bmatrix}.$$

解 ARE(12)得

$$P=\begin{bmatrix}4.3742 & 0.8622\\0.8622 & 0.4818\end{bmatrix}>0,$$

状态反馈控制律为

$$K=[-4.3112 \quad -2.4009].$$

令 $x_0=[x_1(0) \quad x_2(0)]^T=[2 \quad -1]^T$. 取 $h(t)=|\cos(0.5t)|$, $h(t)=5|\cos(0.1t)|$, $h(t)=10|\cos(0.05t)|$, $h(t)=20|\cos(0.025t)|$四种情形仿真发现,既使对于远远大于系统的时间常数的慢时变时滞($h(t)=20|\cos(0.025t)|$),闭环系统也是渐近稳定的,系统的调节时间大约等于其时变时滞幅值的2倍. 由于篇辐所限,这里没有给出其状态轨迹图.

参 考 文 献

1 Mahmoud M S, Al-Muthairi N F. Quadratic stabilization of contiuous time systems with state-delay and norm-bounded time-varying uncertainties. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994,**39**(10):2135—2139

2 曹登庆.不确定线性时滞系统的镇定.控制与决策,1995,**10**(2):153—157

3 郑锋,程勉,高为炳.一类时滞线性系统的变结构控制. 自动化学报,1995,**21**(2):221—225

4 Ni M-L, Wu H-X. A Riccati equation approach to the design of linear robust controllers. *Automatica*, 1993,**29**(6):1603—1605

ROBUST STABILIZATION FOR UNCERTAIN TIME-VARYING TIME-DELAY SYSTEMS WITH MULTI-STATE DELAY

CAO YONGYAN SUN YOUXIAN

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract In this paper, a criteria on the delay-independent asymptotic stability is given in the form of algebraic Riccati inequality for linear time-varying time-delay systems with multi-state delay and then a stabilizing method is presented with the memoryless state feedback for this time-delay systems. A robust stabilizing method is presented also derived for the uncertain time-delay systems with time-varying multi-state delay and time-varying unknown-but-bounded uncertain parameters. The results are very simple since only an algebraic Riccati equation need to be solved. At last, a numerical example is given to check the results.

Key words Uncertain time-delay systems, time-varying time-delay, robust stabilization, memoryless state feedback.