第24卷 第3期
1998年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24,No. 3
May. ,1998

短 文

具有时变不确定线性系统的鲁棒无源控制[1)]

俞 立 潘海天

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310014)

摘 要 研究具有时变不确定参数的线性系统在有界能量外部输入作用下的鲁棒无源控制问题.目的是设计一个反馈控制器使得闭环系统是二次稳定，同时具有严格无源性.研究结果证明，这一问题可以转化为一个等价的具有某个参数的线性时不变系统的正实控制问题，从而可用现有的正实控制问题的求解方法解决所研究的问题.

关键词 无源控制，鲁棒控制，不确定系统.

1 引言

线性时不变系统的正实控制研究已受到了人们极大的关注[1,2]. 对这个问题研究的主要动机来自于鲁棒控制和非线性控制. 具体地说,在一个反馈关联系统中，如果其非线性或不确定部分能够用一个正实系统刻划,则一个适当的闭环系统的严格正实性将保证整个反馈关联系统的鲁棒稳定性[3].

本文研究具有不确定参数的线性系统的鲁棒无源控制问题. 目的是设计一个反馈控制律(静态状态反馈或动态输出反馈控制律),使得闭环系统是鲁棒二次稳定的,同时从外部输入到被调输出量之间是严格无源的.

2 不确定系统的鲁棒无源性

考虑由以下状态空间模型描述的不确定线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + \Delta A(t))\boldsymbol{x}(t) + (B + \Delta B(t))\boldsymbol{w}(t), \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = (C + \Delta C(t))\boldsymbol{x}(t) + (D + \Delta C(t))\boldsymbol{w}(t). \tag{1b}$$

其中$\boldsymbol{x}(t)\in R^n$是状态变量；$\boldsymbol{z}(t)\in R^p$是被调输出；$\boldsymbol{w}(t)\in R^p$是外部输入，且$\boldsymbol{w}(t)\in L_2[0,\infty)$；$A,B,C$和$D$是已知常数矩阵；$\Delta A(t),\Delta B(t),\Delta C(t)$和$\Delta D(t)$是不确定实矩阵值函数，它们表示了系统中可随时间变化的参数不确定性. 本文考虑的不确定性假定是范数有界的，且具有以下的形式

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) & \Delta B(t) \\ \Delta C(t) & \Delta D(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F(t) [E_1 \quad E_2]. \tag{2}$$

---

1) 浙江省自然科学基金资助课题.
收稿日期 1995-11-20

其中 H_1,H_2,E_1和 E_2分别是具有适当维数的常数矩阵,它们反映了不确定性的结构;$F(t)\in R^{i\times j}$是一个具有 Lebesgue 可测元的不确定矩阵值函数，且满足

$$F'(t)F(t)\leq I, \tag{3}$$

式中的 I 表示适当维数的单位矩阵.

本节的目的是对由(1)—(3)式描述的具有时变不确定参数的系统，给出刻划该系统既是二次稳定，又是严格无源的条件.为此,首先给出有关的定义.

为简化以下的叙述，引进记号

$$\hat{A}(t)=A+\Delta A(t),\ \hat{B}(t)=B+\Delta B(t),\hat{C}(t)=C+\Delta C(t),\hat{D}(t)=D+\Delta D(t). \tag{4}$$

定义1[5]. 对系统(1)—(3),如果存在一个对称正定矩阵 P,使得对所有允许的不确定性,有

$$P\hat{A}(t)+\hat{A}'(t)P<0, \tag{5}$$

则系统(1)—(3)称为是二次稳定的 .

定义2. 对系统(1)—(3),如果存在一个常数 $\varepsilon>0$，使得对具有零初始条件的每一个解

$$\int_0^T w'(t)z(t)\mathrm{d}t\geq\varepsilon\int_0^T w'(t)w(t)\mathrm{d}t \tag{6}$$

对所有正常数 T,所有的 $w(t)\in L_2[0,T]$和所有允许的不确定性成立，则系统(1)—(3)称为是严格无源的(strictly passive).

定义3. 对系统(1)—(3),如果 $\hat{D}(t)+\hat{D}'(t)>0$，且存在对称正定矩阵 P,使得对所有允许的不确定性，有

$$\hat{A}'(t)P+P\hat{A}(t)+[\hat{C}(t)-\hat{B}'(t)P]'[\hat{D}(t)+\hat{D}'(t)]^{-1}[\hat{C}(t)-\hat{B}'(t)P]<0, \tag{7}$$

则系统(1)—(3)称为是二次稳定的，且具有严格无源性(简记成 QSSP).

根据定义1和(7)式容易看出,如果系统(1)—(3)是 QSSP，则该系统是二次稳定的,同时也能够证明若系统(1)—(3)是 QSSP,则它也是严格无源的.因此,系统的 QSSP 性质不仅考虑了系统的二次稳定性,而且也考虑了系统的无源性.另一方面，若在系统中不含有任何不确定性，即 $\Delta A(t)=\Delta B(t)=\Delta C(t)=\Delta D(t)=0$，则系统(1)就是一个线性时不变系统，此时,(7)式就是该系统具有广义严格正实性的一个充要条件[2]. 为了证明系统(1)—(3)的 QSSP 性质可以推出系统的无源性,首先给出以下几个 QSSP 的等价条件.

引理1. 系统(1)—(3)是 QSSP 当且仅当对所有允许的不确定性，有

$$T=\begin{bmatrix}-(\hat{A}'(t)P+P\hat{A}(t)) & \hat{C}'(t)-P\hat{B}(t)\\ \hat{C}(t)-\hat{B}'(t)P & \hat{D}(t)+\hat{D}'(t)\end{bmatrix}>0. \tag{8}$$

证明. 通过简单的矩阵运算，即可得证.

引理2. 对具有形式(2)和(3)式的不确定性,(8)式成立当且仅当存在一个常数 $\delta>0$和对称矩阵 $P>0$，使得

$$S=\begin{bmatrix}-(A+H_1E_1)'P-P(A+H_1E_1) & (C+H_2E_1)'-P(B+H_1E_2) & -\delta PH_1+\frac{1}{\delta}E_1'\\ C+H_2E_1-(B+H_1E_2)'P & (D+H_2E_2)+(D+H_2E_2)' & \frac{1}{\delta}E_2'+\delta H_2\\ -\delta H_1'P+\frac{1}{\delta}E_1 & \frac{1}{\delta}E_2+\delta H_2' & I\end{bmatrix}>0. \tag{9}$$

证明. 限于篇幅,从略.

引理3. 如果系统(1)—(3)是 QSSP，则对所有允许的不确定性，该系统是严格无源的.

证明. 限于篇幅，从略.

从引理1和2，可以得出以下结论.

定理1. 系统(1)—(3)是 QSSP 当且仅当存在一个正常数 δ，使得以下系统

$$\dot{x}(t) = (A + H_1E_1)x(t) + \begin{bmatrix} B + H_1E_2 & \delta H_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(t) \\ \bar{w}(t) \end{bmatrix}, \tag{10a}$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ \bar{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C + H_2E_1 \\ \frac{1}{\delta}E_1 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} D + H_2E_2 & \delta H_2 \\ \frac{1}{\delta}E_2 & \frac{1}{2}I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(t) \\ \bar{w}(t) \end{bmatrix} \tag{10b}$$

是 QSSP. 其中 $\bar{w}(t) \in L_2[0 \quad \infty)$.

证明. 根据(7)式和引理1，系统(10)是 QSSP 当且仅当(9)式成立. 另一方面，根据引理1，系统(1)—(3)是 QSSP 当且仅当(8)式成立，进而从引理2得到本定理的结论.

由于系统(10)是一个不带任何不确定参数的定常线性系统，因此二次稳定性等价于稳定性，严格无源性就是线性时不变情况下的广义严格正实性. 由此可以得到以下推论.

推论1. 系统(1)—(3)是 QSSP 当且仅当存在常数 $\delta>0$，使得系统(10)是稳定的，且具有广义严格正实性.

3 鲁棒无源控制

考虑以下具有时变不确定性的线性系统

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [B_u + \Delta B_u(t)]u(t) + [B_w + \Delta B_w(t)]w(t), \tag{11a}$$

$$y(t) = [C_y + \Delta C_y(t)]x(t) + [D_{yu} + \Delta D_{yu}(t)]u(t) + [D_{yw} + \Delta D_{yw}(t)]w(t), \tag{11b}$$

$$z(t) = [C_z + \Delta C_z(t)]x(t) + [D_{zu} + \Delta D_{zu}(t)]u(t) + [D_{zw} + \Delta D_{zw}(t)]w(t), \tag{11c}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 是状态变量，$u(t)\in R^m$ 是控制输入，$w(t)\in R^p$ 是外部输入，且 $w(t)\in L_2[0 \quad \infty)$，$y(t)\in R^q$ 是测量输出，$z(t)\in R^p$ 是被调输出. 不确定性具有以下结构

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) & \Delta B_u(t) & \Delta B_w(t) \\ \Delta C_y(t) & \Delta D_{yu}(t) & \Delta D_{yw}(t) \\ \Delta C_z(t) & \Delta D_{zu}(t) & \Delta D_{zw}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} E_x & E_u & E_w \end{bmatrix}, \tag{12a}$$

$$F'(t)F(t) \le I, \tag{12b}$$

其中 H_x, H_y, H_z, E_x, E_u 和 E_w 是具有适当维数的常数实矩阵.

鲁棒无源控制问题就是设计一个反馈控制律使得闭环系统是 QSSP，相应的控制律称为是一个鲁棒 QSSP 控制律. 以下将针对静态线性状态反馈和动态线性输出反馈控制律，给出这个问题的解.

定理2. 对系统(11)和(12)，假定系统状态是可得到的，则存在一个鲁棒 QSSP 线性状态反馈控制律当且仅当存在一个常数 $\delta>0$，使得系统

$$\dot{x}(t) = (A + H_xE_x)x(t) + (B_u + H_xE_u)u(t) + \begin{bmatrix} B_w + H_xE_w & \delta H_x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(t) \\ \bar{w}(t) \end{bmatrix}, \tag{13a}$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ \bar{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_z + H_zE_x \\ \frac{1}{\delta}E_x \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} D_{zu} + H_zE_u \\ \frac{1}{\delta}E_u \end{bmatrix}u(t) + \begin{bmatrix} D_{zw} + H_zE_w & \delta H_z \\ \frac{1}{\delta}E_w & \frac{1}{2}I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w(t) \\ \bar{w}(t) \end{bmatrix} \tag{13b}$$

可以通过状态反馈镇定，且闭环系统具有广义严格正实性.

证明. 把状态反馈控制律 $u(t)=Kx(t)$ 分别应用到系统(11)和(13)，再应用推论1，即可得本定理的结论.

对许多的实际系统，系统的状态不能直接测得. 为此，要考虑动态输出反馈控制. 选取如下结构动态输出反馈控制器

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t), \tag{14a}$$

$$u(t) = C_c x_c(t), \tag{14b}$$

则有如下定理.

定理3. 控制律(14)是系统(11)和(12)的一个鲁棒 QSSP 动态输出反馈控制律当且仅当存在一个常数 $\delta>0$，使得以下系统

$$\dot{x}(t) = (A + H_x E_x)x(t) + (B_u + H_x E_u)u(t) + [B_w + H_x E_w \quad \delta H_x]\begin{bmatrix} w(t) \\ \bar{w}(t) \end{bmatrix}, \tag{15a}$$

$$y(t) = (C_y + H_y E_x)x(t) + (D_{yu} + H_y E_u)u(t) + [D_{yw} + H_y E_w \quad \delta H_y]\begin{bmatrix} w(t) \\ \bar{w}(t) \end{bmatrix}, \tag{15b}$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ \bar{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_z + H_z E_x \\ \frac{1}{\delta} E_x \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D_{zu} + H_z E_u \\ \frac{1}{\delta} E_u \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} D_{zw} + H_z E_w & \delta H_z \\ \frac{1}{\delta} E_w & \frac{1}{2} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ \bar{w}(t) \end{bmatrix} \tag{15c}$$

可以通过控制律(14)镇定，且闭环系统具有广义严格正实性.

证明. 类似于定理2的证明.

定理2和3表明了系统(11)和(12)的鲁棒无源控制问题可以转化成一个等价的带正参数的线性时不变系统的正实控制问题. 而后者可以通过现有的一些方法解决[2].

特别地，当在系统(11)和(12)中，$\Delta B_w(t)=0$，$\Delta D_{yw}(t)=0$，$\Delta C_z(t)=0$，$\Delta D_{zu}(t)=0$和 $\Delta D_{zw}(t)=0$，即 $H_z=0$和 $E_w=0$，且所有的不确定参数限制为时不变的，则从定理2和3可以得到文[4]的主要结论.

参　考　文　献

1 Haddad W M, Bernstein D S. Robust stabilization with positive real uncertainty: beyond the small gain theorem. *Sys. Control. Lett.*, 1991, **17**: 191－208

2 Sun W, Phargonekar P P, Shim D. Solution to the positive real control problem for linear time-invariant systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**: 2034－2046

3 Vidyasagar M. Nonlinear System Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1993

4 Xie L, Soh Y C. Positive real control problem for uncertain linear time-invariant systems. *Sys. Control Lett.*, 1995, **24**: 265－271

5 Barmish B R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *J. Opt. Theory & Appl.*, 1985, **46**: 399－408

ROBUST PASSIVE CONTROL OF LINEAR SYSTEMS WITH TIME-VARYING UNCERTAIN PARAMETERS

YU LI PAN HAITIAN

(*Institute of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou* 310014)

Abstract This paper concerns the robust passive control problem for linear systems with time-varying uncertain parameters under bounded energy exogenous inputs. The objective is to design a feedback control law such that the closed-loop system is both quadratically stable and strictly passive for all the admissible uncertainties. It is shown that such a problem is equivalent to a positive real control problem for a certain linear time-invariant system with a positive scaling parameter. Thus, a complete solution to such a problem can be achieved by using the existing results of standard positive real control problem.

Key words Passive control, robust control, uncertain systems.

《自动化学报》征稿简则

一、《自动化学报》是中国自动化学会和中国科学院自动化所主办的全国性高级学术期刊，双月刊. 在美国出版英译版，季刊.

二、本刊刊载自动化科学与技术领域的高水平理论性和应用性学术论文. 内容包括：1. 自动控制理论；2. 系统理论与系统工程；3. 自动化技术及其在国民经济各领域中的创造性应用；4. 自动化系统计算机辅助技术；5. 机器人与自动化；6. 模式识别、人工智能与智能控制；7. 自动控制系统中的新概念、新原理、新方法、新设计；8. 自动化学科领域的其它重要问题.

三、本刊以发表论文和短文为主，并不定期地发表长论文、综述文章、问题讨论、书刊评论、国内外学术活动信息等.

四、本刊不接受已在国内外期刊上发表(包括待发表)的稿件，但不排除已在国内外学术会议上发表或准备发表的优秀论文(对于此种情况，作者必须在稿件首页脚注说明).

五、稿件内容的正确性、真实性和可靠性由作者自行负责.

六、来稿一式三份寄北京中关村中国科学院自动化所《自动化学报》编辑部. 邮编100080. 编辑部在收稿后一周内寄送回执. 作者请自留底稿，稿件概不退还. 稿件是否录用一般在半年内通知作者.

七、稿件刊登与否由本刊编委会最后审定，已被录用的稿件需严格按审查意见和《作者加工稿件须知》修改，并一式两份寄编辑部.

八、编委会有权对来稿作适当文字删改或退请作者修改. 文章发表后，按篇酌致稿酬，并赠送30本抽印本，在稿件的修改及联系过程中，如果不特殊说明，本刊只与第一作者联系.

九、来稿格式及要求：

1. 来稿要求论点明确，论证严格，语言通顺，文字简练. 一般定稿时长论文12000字；普通论文6000字；短文不超过3000字；其它形式文章视具体内容由编辑部决定.

(下转第409页)