第 24 卷 第 3 期
1998 年 5 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 3
May., 1998

短 文

结构不确定线性时滞系统的鲁棒控制[1)]

卢立磊 高立群 张嗣瀛
(东北大学自动控制系 沈阳 110006)

摘 要 讨论具有结构不确定性时滞系统的稳定化鲁棒控制器设计问题. 给出使其闭环系统渐近稳定的无记忆线性状态反馈控制律. 文中例子表明,该结论比已有结果保守性小.

关键词 不确定性,鲁棒性,确定性,时滞.

1 引言

文献[1]中利用李雅普诺夫稳定性理论研究了具有不满足"匹配条件"的时滞系统,文献[2]又对文献[1]中的结果作了推广,给出一种当不存在 K_1 满足文献[1]中不等式时的设计方法. 利用文献[1]中的定理,可以先确定 $\|N\|$,找出 K_1(若存在)使不等式成立,然后解方程求出 P,得到反馈控制律. 然而在很多情况下不存在 K_1 使 $A+A^T<0$,事实上本文的例子进一步表明,即使 $A+A^T<0$ 在某些情况下(不确定参数上界变大)也不存在 K_1 满足此不等式,从而大大限制了适用范围. 另外,文献[1,2]中的两种方法都需要求解不确定矩阵的特征值,往往比较困难,而当这些不确定项具有某种结构时却要容易得多. 其实,非结构性不确定项在实际中是很少发生的. 相反,干扰矩阵的结构信息往往是可以获得的,而不仅仅局限于它们的上下界. 因此,近十几年许多学者对这一问题产生了极大兴趣,并获得一些很好的结果[3-6]. 本文主要研究这种具有结构不确定项的时滞系统的稳定鲁棒控制问题. 需要指出的是,这种结构不确定性并不是一般意义下的"匹配条件". 当文献[1,2]中形式的结构应用到本文方法时,可以得到保守性更小的结果.

2 问题描述

考虑文献[1,2]中描述的不确定线性时滞系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A_0+\Delta A_0(r(t))]\boldsymbol{x}(t)+[A_1+\Delta A_1(s(t))]\boldsymbol{x}(t-h)+B_{\boldsymbol{u}}(t),\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t),\ t\in[-h,0].\end{cases}\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$, $\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 分别是状态和控制向量; $h>0$ 是时滞常数; A_0, A_1, B 是系统的标称参数矩阵;$\boldsymbol{\Phi}(t)$是连续的向量初值函数;矩阵 $\Delta A_0(r(t))$, $\Delta A_1(s(t))$是适当维数的连续函数矩

1)国家自然科学基金资助项目.
收稿日期 1995-05-15

阵；$[A_0,B]$可控；$r(t)$，$s(t)$勒贝格可测且属于相应的紧集. 另外，文献[4]指出在很多实际问题中只有很少的不确定参数，但是这些参数会进入很多系统矩阵中. 因此，这里假设

$$\Delta A_0(r(t))=\sum_{i=1}^{m_1} r_i(t)A_{0i},\quad \Delta A_1(s(t))=\sum_{i=1}^{n_1} s_i(t)A_{1i}. \tag{2}$$

其中 A_{0i}和 A_{1i}是常数矩阵，代表不确定参数进入系统时的结构特性；$r_i(t)$和 $s_i(t)$是不确定参数，可以是时间的线性或非线性函数，且属于有界集；m_1 和 n_1 分别表示不确定参数的个数.

本文的目的是寻找无记忆线性状态反馈控制律 $\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)$，其中 $K\in R^{m\times n}$，使不确定闭环系统渐近稳定. 为比较方便，先引入文献[1,2]中的定理，随后给出本文主要结论.

定理 1.[1]若存在 $K_1\in R^{m\times n}$使

$$2\sqrt{\|N\|}<-\mu(A), \tag{3}$$

则系统(1)是能够被稳定的，且

$$K=K_1-0.5HH^TB^TP, \tag{4}$$

其中 P 是以下方程的解矩阵

$$A^TP+PA=-Q,\ Q^T=Q>0, \tag{5}$$

其中 $Q=4\|N\|^{-\frac{1}{2}}\mu(A)I$，$A=A_0+BK_1$，$N=\Delta A_0\Delta A_0^T+\Delta A_1\Delta A_1^T+DD^T$，$H=(BB^T)^{-1}B^TA_1$，$D=A_1-BH$.

从(3)式可以看出，要求 $A+A^T<0$，因此限制了应用范围. 在这里及下文中 $\mu(A)=\frac{1}{2}\lambda_{\max}(A+A^T)$，$\|A\|=\sigma(A)=[\lambda_{\max}(A^TA)]^{\frac{1}{2}}$，$|A|$表示对 A 中各元素取绝对值后得到的矩阵.

定理 2[2]. 矩阵 P 是(5)式的解，这里 $Q=(3+a)I$，$a>0$. 若

$$2\sigma(\Delta A_0)\sigma(P)+\sigma^2(\Delta A_1)\sigma^2(P)+\sigma^2(PD)<a\ , \tag{6}$$

则(4)式使不确定系统(1)渐近稳定：D 和 H 如定理 1 中定义，K_1 使 $A=A_0+BK_1$ Hurwitz 稳定.

定理 3. P 是矩阵方程(5)的解，Q 为设计者选择的正定阵. 若

$$2\{\max|r_j(t)|\sigma(\sum_{i=1}^{m_1}|P_{0i}|)\}^2+2\{\max|s_j(t)|\sigma(\sum_{i=1}^{n_1}|P_{1i}|)\}^2<\beta^2, \tag{7}$$

则(4)式使不确定系统(1)渐近稳定. 其中 $A=A_0+BK_1$，$P_{0i}=PA_{0i}$，$P_{1i}=PA_{1i}$，$\beta=\lambda_{\min}(\Omega)-1$，$\Omega=(Q-PDD^TP)\times 0.5$，$H$，$K_1$ 和 D 如定理 1 定义.

证明. 因为 P 存在，取李雅普诺夫函数

$$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T(t)P\boldsymbol{x}(t)+\varepsilon\int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^T(s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s,\ \varepsilon<2, \tag{8}$$

则(8)式沿(1)式的导数为

$$\begin{aligned}\dot V(\boldsymbol{x})=&\boldsymbol{x}^T(A^TP+PA-PBHH^TB^TP)\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^TP\Delta A_0\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^TPBH\boldsymbol{x}(t-h)+\\&2\boldsymbol{x}^TPD\boldsymbol{x}(t-h)+2\boldsymbol{x}^TP\Delta A_1\boldsymbol{x}(t-h)+\varepsilon\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}-\varepsilon\boldsymbol{x}^T(t-h)\boldsymbol{x}(t-h).\end{aligned}$$

对任意适当维数的实矩阵 X 和 Y，有 $X^TY+Y^TX\leqslant X^TX+Y^TY$. 再由(5)式，则

$$\begin{aligned}\dot V(\boldsymbol{x})=&\boldsymbol{x}^T(\varepsilon I-Q+PDD^TP)\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^TP\Delta A_0\boldsymbol{x}+\\&2\boldsymbol{x}^TP\Delta A_1\boldsymbol{x}(t-h)-(\varepsilon-2)\boldsymbol{x}^T(t-h)\boldsymbol{x}(t-h).\end{aligned}$$

注意到(2)式以及 P_{0i}和 P_{1i}的定义，有

$$\dot V(\boldsymbol{x})\leqslant\boldsymbol{x}^T(\varepsilon I-Q+PDD^TP+2\sum_{i=1}^{m_1}r_i(t)P_{0i})\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^T\sum_{i=1}^{n_1}s_i(t)P_{1i}\boldsymbol{x}(t-h)-$$

$$(\varepsilon-2)\boldsymbol{x}^T(t-h)\boldsymbol{x}(t-h)=$$

$$\boldsymbol{x}^T\{\varepsilon I-2\Omega+2\sum_{i=1}^{m_1}r_i(t)P_{0i}+\frac{1}{\varepsilon-2}[\sum_{i=1}^{n_1}s_i(t)P_{1i}][\sum_{i=1}^{n_1}s_i(t)P_{1i}]^T\}\boldsymbol{x}-$$

$$(\varepsilon-2)\{\boldsymbol{x}(t-h)-\frac{1}{\varepsilon-2}[\sum_{i=1}^{n_1}s_i(t)P_{1i}]^T\boldsymbol{x}(t)\}^T\{\boldsymbol{x}(t-h)-\frac{1}{\varepsilon-2}[\sum_{i=1}^{n_1}s_i(t)P_{1i}]^T\boldsymbol{x}(t)\}\leqslant$$

$$\boldsymbol{x}^T\{\varepsilon I-2\Omega+2\sum_{i=1}^{m_1}r_i(t)P_{0i}+\frac{1}{\varepsilon-2}[\sum_{i=1}^{n_1}s_i(t)P_{1i}][\sum_{i=1}^{n_1}s_i(t)P_{1i}]^T\}\boldsymbol{x}.$$

显然,若 $\dot V<0$,只需

$$\sigma\{2\sum_{i=1}^{m_1}r_i(t)P_{0i}+\frac{1}{\varepsilon-2}[\sum_{i=1}^{n_1}s_i(t)P_{1i}][\sum_{i=1}^{n_1}s_i(t)P_{1i}]^T\}<2\lambda_{\min}(\Omega)-\varepsilon,$$

$$2(\varepsilon-2)\sigma(\sum_{i=1}^{m_1}r_i(t)P_{0i})+\sigma^2(\sum_{i=1}^{n_1}s_i(t)P_{1i})<(\varepsilon-2)[2\lambda_{\min}(\Omega)-\varepsilon].$$

由于
$$2(\varepsilon-2)\sigma(\sum_{i=1}^{m_1}r_i(t)P_{0i})\leqslant(\varepsilon-2)^2+\sigma^2(\sum_{i=1}^{m_1}r_i(t)P_{0i}),$$

所以只需

$$\sigma^2(\sum_{i=1}^{m_1}r_i(t)P_{0i})+\sigma^2(\sum_{i=1}^{n_1}s_i(t)P_{1i})<(\varepsilon-2)[2\lambda_{\min}(\Omega)-\varepsilon]-(\varepsilon-2)^2\triangleq f(\varepsilon).$$

易知,当 $\varepsilon=(\lambda_{\min}(\Omega)+3)\times0.5$ 时,$f(\varepsilon)$有最大值 $\beta^2\times0.5$. 由文献[4]可知

$$\sigma(\sum_{i=1}^{N}k_i(t)P_i)\leqslant|k_j(t)|\sigma(\sum_{i=1}^{N}|P_i|),$$

所以
$$2\{\max|r_j(t)|\sigma(\sum_{i=1}^{m_1}|P_{0i}|)\}^2+2\{\max|s_j(t)|\sigma(\sum_{i=1}^{n_1}|P_{1i}|)\}^2<\beta^2$$

时,$\dot V(\boldsymbol{x})<0$,从而保证不确定系统(1)渐近稳定.　　证毕.

对系统(1)进行相似变换 $\boldsymbol{x}(t)=M\boldsymbol{z}(t)$后有下面的推论.

推论 4. P 为矩阵方程(5)的正定对称解,若(7)式成立时,则

$$\boldsymbol{u}(t)=K_1\boldsymbol{x}(t)-0.5\overline{H}\overline{H}^T\overline{B}^TP\boldsymbol{x}(t),\tag{9}$$

使不确定系统(1)渐近稳定,其中 $A=\overline{A}_0+\overline{B}K_1$, $\overline{A}_0=M^{-1}A_0M$, $\overline{B}=M^{-1}B$, $P_{0i}=PM^{-1}A_{0i}M$, $P_{1i}=PM^{-1}A_{1i}M$, $\beta=\lambda_{\min}(\Omega)-1$, $\Omega=(Q-P\overline{D}\ \overline{D}^TP)\times0.5$, $\overline{H}$ 和 $\overline{D}$ 由 $\overline{A}_1=\overline{B}\overline{H}+\overline{D}$ 确定, $\overline{A}_1=M^{-1}A_1M$, K_1使 A 阵 Hurwitz 确定.

由文献[5]知,经过适当的坐标变换后由推论4可以得到保守性更小的结果.

3 例子

考虑文献[1]中描述的线性时滞不确定系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\begin{bmatrix}-4+r_1(t) & 2\\ 3 & -1+r_2(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}s(t) & 1+s(t)\\ -1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t-h)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t),\tag{10}$$

其中 $r_1(t)$, $r_2(t)$, $s(t)$是不确定参数,且满足$|r_i(t)|\leqslant1$ $(i=1,2)$, $|s(t)|\leqslant1.5$(在文献[1,2]

中$|s(t)|\leqslant 1.0$). 根据本文中的记号,同文献[1,2]取

$$H=[-0.5\quad 0.5],\ K_1=[-1\quad -4],\ D=\begin{bmatrix}05. & 05.\\ -0.5 & -0.5\end{bmatrix},\ \text{则}\ A=\begin{bmatrix}-5 & -2\\ 2 & -5\end{bmatrix}.$$

(1) 首先应用本文中的方法,取 $Q=10I$,则由(5)式解得 $P=I$,于是

$$PDD^TP=\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix},\ \Omega=\begin{bmatrix}9.5 & 0.5\\ 0.5 & 9.5\end{bmatrix}\times 0.5.$$

所以 $\beta=3.5$, $\beta^2=12.25$. 从而不等式(7)左端为$2\times(1+2\times 2.25)=11$,条件成立,因此 $K=-[1.5\quad 4.5]$使系统(10)渐近稳定.

(2) 利用定理2,同样取 $Q=10I$,即 $a=7$. 由(5)式得 $P=I$,(6)式左端为$2+2\times 1.5^2+1=7.5$,条件不成立. 可见按文献[2]中的方法 $K=-[1.5\quad 4.5]$不能使(10)渐近稳定,定理2具有保守性.

(3) 利用定理1,由文献[1]可知,N 可由 N'代替

$$N'=\begin{bmatrix}7 & -0.5\\ -0.5 & 2.5\end{bmatrix},$$

$\sqrt{\|N\|}=2.656>-0.5\mu(A_0+BK_1)=2.5$. 所以(3)式不成立. 实际上在这种情况下按文献[1]中的方法找不到控制律使闭环系统渐近稳定,这是因为 $\max[-\mu(A_0+BK_1)]=5$, $\forall\ K_1\in R^{m\times n}$,为此不妨设 $K_1=-[x\quad y]$,则

$$A=A_0+BK_1=\begin{bmatrix}-x-4 & 2-y\\ 3-x & -1-y\end{bmatrix}.$$

于是$-\lambda_{\max}(A+A^T)=(x+y+5)-\sqrt{(3+x-y)^2+(x+y-5)^2}\triangleq g(x,y)$. 易知当 $x-y+3=0$时,$g(x,y)$有最大值10. 由此可见,当$|r_i(t)|\leqslant 1$ $(i=1,2)$, $|s(t)|\leqslant 1.5$时按定理1无法设计控制器使其渐近稳定. 尽管此时 $A^T+A<0$,可是当参数界变大时定理1失效,从而适用范围大大受到限制. 由此可以看出定理3的保守性最小.

参 考 文 献

1 俞立. 不确定动态时滞系统的稳定化鲁棒控制. 控制与决策,1993,**8**(4):307-310

2 曹登庆. 不确定线性时滞系统的镇定. 控制与决策,1995,**10**(2):153-157

3 Kouvaritakis B, Latchman H. Techniques in the analysis of structured perturbation. *Int. J. Control*, 1985, **41**(1):1381-1412

4 Zhou K, Khargonekar P P. Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1987, **32**(7):621-623

5 Yedavalli R K, Liang Z. Reduced conservatism in stability robustness bounds by state transformation. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1986, **31**(9):863-866

6 Kenneth M Sobel. Robust Control for linear systems with structured state space uncertainty. *Int. J. Control*, 1989, **50**(5):1991-2004

ROBUST CONTROL FOR LINEAR TIME-DELAY SYSTEMS WITH STRUCTURED UNCERTAINTY

LU LILEI GAO LIQUN ZHANG SIYING

(*Dept. of Automatic Control, Northeastern University, Shenyang* 110006)

Abstract This paper is mainly concerned with the problem of stabilizing robust controller for time-delay systems with structured uncertainty. A memoryless linear state feedback controller is presented to guarantee the closed-loop system asmptotically stable. An example is given to show that the result in this paper is much less conservative than the existing ones.

Key words Uncertainty, robustness, stability, time-delay.