第24卷 第3期
1998年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 3
May., 1998

两层多目标规划的罚函数法

赵 蔚

(北京邮电大学管理工程系 北京 100876)

摘 要 研究了一类非线性两层多目标规划问题. 在下层多目标规划问题的目标函数是严格凸函数、决策变量约束集是凸集的假设下,通过将两层多目标规划问题转化成一系列单层多目标规划问题,建立了两层多目标规划的罚函数理论,并进行了收敛性分析. 从而丰富了两层多目标规划的理论,为解决实际中的两层多目标决策问题提供了有力的工具.

关键词 两层规划,多目标规划,罚函数.

1 引言

两层多目标规划的研究始于70年代初,由于它能有效地解决有层次的决策问题,逐步引起了人们的重视,目前已成为决策领域中的一个重要研究方向. 迄今为止,针对某些特殊的两层多目标规划问题已提出了一些算法[1-4],但算法的效率还有待提高;理论方面的研究成果还比较少[5].

罚函数法是求解非线性约束最优化问题的一种方法,它在非线性规划方法论中占据着重要的地位. 对于单目标两层规划问题,罚函数也显示出了它的重要作用. Shimizu, Aiyoshi[6]和 Aiyoshi, Shimizu[7]基于罚函数提出了求解单目标两层规划问题的方法. 这些方法中,惩罚项仅被用于下层目标函数. 在 Aiyoshi, Shimizu[8]和 Ishizuka, Aiyoshi[9]基于罚函数提出的求解单目标两层规划问题的方法中,上、下两层目标函数都加入了惩罚项,从而提高了求解效率. 对于多目标规划情形, White[10]把非线性规划中 Zangwill 有关罚函数的部分结果推广到多目标情形,建立了非劣解意义下的罚函数理论. 汪寿阳[11]进一步将 Zangwill 有关罚函数的某些结果推广到一般非控解情形,建立了在控制结构是一般的凸锥情形下的多目标罚函数理论.

本文研究一类两层多目标规划问题,在下层多目标决策问题满足凸性假设(即假设目标函数是严格凸函数,决策变量约束集是凸集)的条件下,通过将两层多目标规划问题转化为一系列单层多目标规划问题,建立了两层多目标规划的罚函数理论.

2 问题的描述

本文所考虑的两层多目标规划问题的数学模型为

$$\text{(BLMOP)} \min_{x} \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(f_{01}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\cdots,f_{0N_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),$$

收稿日期 1996-02-09

$$\begin{aligned} &\text{s.t. } \boldsymbol{x}\in X=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x})\leqq 0\}, \\ \text{且 } \boldsymbol{y} \text{ 解 } &\min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(f_{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\cdots,f_{1N_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})), \\ &\text{s.t. } \boldsymbol{y}\in Y=\{\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y})\leqq 0\}, \\ &\qquad \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqq 0. \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$分别是上层决策者(UDM)的决策变量和目标函数;$\boldsymbol{y},\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$分别是下层决策者(LDM)的决策变量和目标函数;$\boldsymbol{x}\in R^{n_0}$, $\boldsymbol{y}\in R^{n_1}$; $\boldsymbol{h}_0$, $\boldsymbol{h}_1$ 和 $\boldsymbol{g}_1$ 分别是 m_0 维、m_1 维和 l_1 维向量值函数.

模型(BLMOP)所描述的决策机制是:上、下层决策者采取正向 Stackelberg 主从策略,上层决策者为主方,下层决策者为从方. 具体地,在决策过程中 UDM 首先向 LDM 宣布其决策 $\boldsymbol{x}$, 这一决策将影响 LDM 的目标函数和约束集;然后 LDM 在这一限制条件下确定其非劣解集,并以此作为对 UDM 的决定的反应;最后,UDM 根据它的偏好,确定决策变量 $\boldsymbol{x}$ 的值 $\boldsymbol{x}^*$,以及与 $\boldsymbol{x}^*$ 相对应的 LDM 的非劣解集中的选用解 $\boldsymbol{y}^*$,得到 UDM 的满意解.

为了清楚地描述(BLMOP)的解的概念,下面给出严格的数学定义. 对给定的 $\boldsymbol{x}\in X$,(BLMOP)的下层决策问题为

$$\begin{aligned} (\mathrm{MOP}(\boldsymbol{x}))\quad &\min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(f_{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\cdots,f_{1N_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})), \\ &\text{s.t. } \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y})\leqq 0, \\ &\qquad \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqq 0. \end{aligned}$$

这是一个多目标规划问题,记 $S(\boldsymbol{x})$为其可行解集,$R(\boldsymbol{x})$为其非劣解集.

定义 1. $(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}})$称为(BLMOP)的一个可行解,如果 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$, 且 $\bar{\boldsymbol{y}}\in R(\bar{\boldsymbol{x}})$. 记(BLMOP)的可行解集为 S,则 $S=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{x}\in X,\ \boldsymbol{y}\in R(\boldsymbol{x})\}$.

定义 2. $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$称为(BLMOP)的一个非劣解(或弱非劣解),如果$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$满足如下条件:

1) $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)\in S$,

2) 不存在$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in S$, 使 $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$(或 $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$).

3 模型简化

对(BLMOP)做如下假设:

i) 函数 $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x})$连续,$X$ 是紧集; $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$连续可微,$Y$ 是紧集;

ii) 对任意给定的 $\boldsymbol{x}\in X$, $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是关于 $\boldsymbol{y}$ 的严格凸函数,$\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是关于 $\boldsymbol{y}$ 的凸函数;

iii) $\mathrm{int}\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x})\leqq 0\}\neq\Phi$, 且 $cl(\mathrm{int}\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x})\leqq 0\})=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x})\leqq 0\}$;

iv) 对任意给定的 $\boldsymbol{x}\in X$, $\mathrm{int}S(\boldsymbol{x})\neq\Phi$, 且 $cl(\mathrm{int}S(\boldsymbol{x}))=S(\boldsymbol{x})$;

v) 对任意给定的$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 令 $I_1(\boldsymbol{y})=\{i\mid h_{1i}(\boldsymbol{y})=0\}$, $I_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\{j\mid g_{1j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\}$,则 $\nabla_{\boldsymbol{y}}h_{1i}(\boldsymbol{y}),i\in I_1(\boldsymbol{y})$, $\nabla_{\boldsymbol{y}}g_{1j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),j\in I_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 线性独立.

考虑(BLMOP)的下层决策问题(MOP($\boldsymbol{x}$)),令 $\boldsymbol{w}=(w_1,\cdots,w_{N_1})$,构造如下单目标规划问题

$$(\mathrm{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}))\quad \min_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{w}\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{N_1} w_i f_{1i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y})\leqq 0,$$
$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqq 0.$$

令 $W=\{\boldsymbol{w}\mid \boldsymbol{w}\in R^{N_1},\ \boldsymbol{w}\geqq 0, 1\leqq\sum_{i=1}^{N_1}w_i\leqq 2\}$，根据多目标规划的理论，$\boldsymbol{y}^*$ 是(MOP($\boldsymbol{x}$))的非劣解当且仅当存在 $\boldsymbol{w}\in W$，使 $\boldsymbol{y}^*$ 是(P($\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}$))的最优解. 于是得到了一个与(BLMOP)等价的模型

$$\text{(BLMOP1)}\quad \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}}(f_{01}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \cdots,\ f_{0N_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),$$
$$\textbf{s.t.}\quad \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x})\leqq 0,$$
$$1\leqq\sum_{i=1}^{N_1}w_i\leqq 2,$$
$$\boldsymbol{w}\geqq 0,$$
$$\text{且 } \boldsymbol{y} \text{ 解}\quad \min_{\boldsymbol{y}}\sum_{i=1}^{N_1}w_i f_{1i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$
$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y})\leqq 0,$$
$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqq 0.$$

当假设 ii)成立时，对任意给定的 $\boldsymbol{x}\in X$，$\boldsymbol{w}\in W$，(BLMOP1)的下层决策问题(P($\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}$))有唯一解，记为 $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$.

定理 1. (BLMOP)与(BLMOP1)在下列意义下等价：

1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是(BLMOP)的可行解当且仅当存在 $\boldsymbol{w}\in W$，使$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y})$是(BLMOP1)的可行解；

2) $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$是(BLMOP)的非劣解当且仅当存在 $\boldsymbol{w}^*\in W$，使$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{y}^*)$是(BLMOP1)的非劣解.（证明略.）

4　两层多目标规划的罚函数定理

先用内点罚函数法将(BLMOP1)的下层决策问题($P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$)转化成无约束最优化问题.

对给定的$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$，定义 $\mathrm{int}S(\boldsymbol{x})$上的函数

$$p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{\cdot},\ r)=\sum_{i=1}^{N_1}w_i f_{1i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+r\varphi(\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})).$$

其中 $r>0$，$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是内点罚函数，满足

$$\varphi(\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\geqq 0,\qquad \text{当 } \boldsymbol{y}\in \mathrm{int}S(\boldsymbol{x}) \text{ 时；}$$
$$\varphi(\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\to+\infty,\qquad \text{当 } \boldsymbol{y}\to\partial S(\boldsymbol{x}) \text{ 时；}$$
$$\varphi(\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{g}_1)=\sum_{i=1}^{m_1}\varphi(h_{1i})+\sum_{j=1}^{l_1}\varphi(g_{1j}).$$

这里 $\partial S(\boldsymbol{x})$表示 $S(\boldsymbol{x})$的边界，φ是定义在$(-\infty,0)$上单调递增的连续可微凸函数.

考虑下列无约束最优化问题

$$(\text{P1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^{\cdot},r))\qquad \min_{\boldsymbol{y}} p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{\cdot},r),$$

当假设 ii)成立时，对任意给定的 $\boldsymbol{x}\in X$，$\boldsymbol{w}\in W$，$r>0$，(P1($\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^{\cdot},r$))有唯一解，记为 $\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^{\cdot},r)$.

$(\mathrm{P1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}^{\cdot},r))$是一凸规划问题，由其驻点条件$\nabla_y p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{\cdot},r)=0$代替(BLMOP1)的下层决策问题$(\mathrm{P1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}))$，得到如下的单层多目标规划问题：

$$(\mathrm{MOP2}(r))\quad \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}}(f_{01}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \cdots,\ f_{0N_0}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})),$$

$$\text{s.t.}\ \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x})\leqq 0,$$

$$1\leqq\sum_{i=1}^{N_1}w_i\leqq 2,$$

$$\boldsymbol{w}\geqq 0,$$

$$\nabla_y p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{\cdot},r)=0$$

再利用混合罚函数法，将$(\mathrm{MOP2}(r))$转化成无约束多目标规划问题.

定义辅助函数

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{\cdot},t,s,r)=&\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+t\theta(\boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}'_0(\boldsymbol{w}))\boldsymbol{e}\\&+r\varphi(\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\boldsymbol{e}+s\Psi(\|\nabla_y p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{\cdot},r)\|)\boldsymbol{e},\end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{e}$是所有分量都是1的N_0维向量，$\boldsymbol{h}'_0(\boldsymbol{w})=\left(1-\sum_{i=1}^{N_1}w_i,\ \sum_{i=1}^{N_1}w_i-2,-\boldsymbol{w}\right)^T$，从而$W=\{\boldsymbol{w}\mid \boldsymbol{h}'_0(\boldsymbol{w})\leqslant 0\}$，$\theta(\boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{h}'_0(\boldsymbol{w}))$是内点罚函数，满足

$\theta(\boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}'_0(\boldsymbol{w}))>0$，当$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\in\mathrm{int}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\mid \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x})\leqq 0,\ \boldsymbol{h}'_0(\boldsymbol{w})\leqq 0\}$时，

$\theta(\boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}'_0(\boldsymbol{w}))\to+\infty$，当$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\to\partial\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\mid \boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x})\leqq 0,\ \boldsymbol{h}'_0(\boldsymbol{w})\leqq 0\}$时；

$\Psi(\|\nabla_y p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{\cdot},r)\|)$是连续单调递增外点罚函数，满足

$\Psi(\|\nabla_y p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{\cdot},r)\|)=0$，当$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})\in\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})\mid \boldsymbol{y}\in\mathrm{int}S(\boldsymbol{x}),\nabla_y p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{\cdot},r)=0\}$时；

$\Psi(\|\nabla_y p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{\cdot},r)\|)>0$，当$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})\in\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})\mid \boldsymbol{y}\in\mathrm{int}S(\boldsymbol{x}),\nabla_y p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{\cdot},r)\neq 0\}$时.

考虑下面的单层无约束多目标规划问题

$$(\mathrm{MOP3}(t,s,r))\qquad \min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}^{\cdot},\ t,s,r)\ .$$

引理. 设$\{r_n\}$和$\{t_n\}$都是严格单调下降正数列，且$r_n\to 0(n\to\infty)$，$t_n\to 0(n\to\infty)$；$\{s_n\}$是严格单调上升正数列，且$s_n\to+\infty(n\to\infty)$；$(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{w}_n,\boldsymbol{y}_n)$是$(\mathrm{MOP3}(t_n,s_n,r_n))$的弱非劣解；$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{y}^*)$是序列$\{(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{w}_n,\boldsymbol{y}_n)\}$的极限点；若假设 i)－V)成立，则$\boldsymbol{y}^*$是(BLMOP1)的下层决策问题$(\mathrm{P}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*))$的最优解.（证明略）

定理 2. 设$\{r_n\}$，$\{t_n\}$都是严格单调下降正数列，且$r_n\to 0(n\to\infty)$，$t_n\to 0(n\to\infty)$；$\{s_n\}$是严格单调上升正数列，且$s_n\to+\infty(n\to\infty)$；$(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{w}_n,\boldsymbol{y}_n)$是$(\mathrm{MOP3}(t_n,s_n,r_n))$的任一弱非劣解；若假设 i)－V)成立，则序列$\{(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{w}_n,\boldsymbol{y}_n)\}$存在极限点，且任一极限点都是(BLMOP1)的弱非劣解.

证明. 由于X,W,Y都是紧集，$\{\boldsymbol{x}_n\}\subset X$，$\{\boldsymbol{w}_n\}\subset W$，$\{\boldsymbol{y}_n\}\subset Y$，故序列$\{(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{w}_n,\boldsymbol{y}_n)\}$存在极限点. 设$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{y}^*)$为其任一极限点，$\{(\boldsymbol{x}_{n_k},\boldsymbol{w}_{n_k},\boldsymbol{y}_{n_k})\}$为收敛到该点的子序列，则有$\boldsymbol{x}^*\in X$，$\boldsymbol{w}^*\in W$. 由引理，$\boldsymbol{y}^*$是(BLMOP1)的下层决策问题$(\mathrm{P}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*))$的最优解，即$\boldsymbol{y}^*=\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*)$. 所以$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{y}^*)$是(BLMOP1)的可行解.

假设$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{y}^*)$不是(BLMOP1)的弱非劣解，那么存在(BLMOP1)的可行解$(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}',\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}'))$，使

$$\boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x}') \leqq 0, \quad \boldsymbol{h}'_0(\boldsymbol{w}') \leqq 0, \tag{1}$$

$$f_{0i}(\boldsymbol{x}',\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}')) < f_{0i}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*),\ i=1,\cdots,N_0. \tag{2}$$

由于在假设 i), ii)下,$\bar{y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$关于$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$连续,再由函数 $\boldsymbol{f}_0$ 的连续性,可得 $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}))$关于$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$连续. 因此存在 $\delta>0$ 使当$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\in N((\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}'),\delta)$时成立 $f_{0i}(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}))<f_{0i}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$,$i=1,\cdots,N_0$, 其中 $N((\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}'),\delta)$表示$(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}')$的 δ-邻域. 由(1)式及假设 iii)可知, 存在$(\boldsymbol{x}'',\boldsymbol{w}'')\in\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\,|\,\boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x})<0,\ \boldsymbol{h}'_0(\boldsymbol{w})<0\}\cap N((\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}'),\delta)$. 取

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\min\{f_{0i}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)-f_{0i}(\boldsymbol{x}'',\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}'',\boldsymbol{w}''))\,|\,i=1,\cdots,N_0\},$$

设 $\boldsymbol{y}''_{n_k}$是问题(P1$(\boldsymbol{x}'',\boldsymbol{w}'';r_{n_k})$)的最优解,则$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}'',\boldsymbol{w}'',\boldsymbol{y}''_{n_k};\ t_{n_k},\ s_{n_k},\ r_{n_k})=\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}'',\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}'',\boldsymbol{w}''))$. 故存在正整数 K,使当 $k>K$ 时成立

$$|\boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{x}'',\boldsymbol{w}'',\boldsymbol{y}''_{n_k};t_{n_k},s_{n_k},r_{n_k})-f_{0i}(\boldsymbol{x}'',\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}'',\boldsymbol{w}''))|<\boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{i}=1,\cdots,\boldsymbol{N}_0.$$

由$(\boldsymbol{x}_{n_k},\boldsymbol{w}_{n_k},\boldsymbol{y}_{n_k})\to(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{y}^*)(k\to\infty)$及 $\boldsymbol{f}_0$ 的连续性可知, 存在 K',使当 $k>K'$时成立

$$|f_{0i}(\boldsymbol{x}_{n_k},\boldsymbol{y}_{n_k})-f_{0i}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)|<\varepsilon,\ i=1,\cdots,N_0,$$

于是当 $k>\max\{K,K'\}$时成立

$$\boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{x}'',\boldsymbol{w}'',\boldsymbol{y}''_{n_k};t_{n_k},s_{n_k},r_{n_k})<\boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{x}_{n_k},\boldsymbol{w}_{n_k},\boldsymbol{y}_{n_k};\ t_{n_k},s_{n_k},r_{n_k}),\quad i=1,\cdots,N_0.$$

这与$(\boldsymbol{x}_{n_k},\boldsymbol{w}_{n_k},\boldsymbol{y}_{n_k})$是问题(MOP3$(t_{n_k},s_{n_k},r_{n_k})$)的弱非劣解矛盾.　　证毕.

定理 2 是针对弱非劣解来讨论的,下面考虑非劣解的情形.

定理 3.　设$\{r_n\}$,$\{t_n\}$都是严格单调下降正数列,且 $r_n\to0(n\to\infty)$, $t_n\to0(n\to\infty)$;$\{s_n\}$是严格单调上升正数列,且 $s_n\to+\infty(n\to\infty)$;$(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{w}_n,\boldsymbol{y}_n)$是(MOP3$(t_n,s_n,r_n)$)的任一非劣解;若假设 i)－Ⅴ) 成立,$f_{0i}(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}))$是关于$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$的严格凸函数,$i=1,\cdots,N_0$, X 是凸集,那么序列$\{(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{w}_n,\boldsymbol{y}_n)\}$存在极限点, 且任一极限点都是(BLMOP1)的非劣解.

证明. 由定理 2, 序列$\{(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{w}_n,\boldsymbol{y}_n)\}$存在极限点, 设$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{y}^*)$为其任一极限点,则$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{y}^*)$是(BLMOP1)的弱非劣解. 假设$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{y}^*)$不是(BLMOP1)的非劣解,那么存在(BLMOP1)的可行解$(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}',\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}'))$,使

$$\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}',\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}'))\leqslant f_0(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*).$$

令$(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{w}})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}')+\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*)$,由 X,W 都是凸集,可得 $\tilde{\boldsymbol{x}}\in X,\tilde{\boldsymbol{w}}\in W$. 再由 $\boldsymbol{f}_0$ 是关于$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})$的严格凸函数,得

$$\boldsymbol{f}_0(\tilde{\boldsymbol{x}},\bar{\boldsymbol{y}}(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{\boldsymbol{w}}))<\frac{1}{2}\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}',\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}'))+\frac{1}{2}\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)\leqslant\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*),$$

故$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{y}^*)$不是(BLMOP1)的弱非劣解,于是得出矛盾.　　证毕.

定理 3 的假设条件很强. 在一般情况下,有如下结论.

定理 4.　设$\{r_n\}$,$\{t_n\}$都是严格单调下降正数列,且 $r_n\to0(n\to\infty)$, $t_n\to0(n\to\infty)$;$\{s_n\}$是严格单调上升正数列,且 $s_n\to+\infty(n\to\infty)$; $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*,\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*))$是(BLMOP1)的非劣解, 且$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*)\in\operatorname{int}\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\,|\,\boldsymbol{h}_0(\boldsymbol{x})\leqq0,1\leqq\sum\limits_{i=1}^{N_1}w_i\leqq2,\boldsymbol{w}\geqq0\}$; 若假设 i)－Ⅴ)成立,则存在子列$\{r_{n_k}\}\subseteq\{r_n\}$, $\{t_{n_k}\}\subseteq\{t_n\}$, $\{s_{n_k}\}\subseteq\{s_n\}$, 使得$(\boldsymbol{x}_{n_k},\boldsymbol{w}_{n_k},\boldsymbol{y}_{n_k})$是(MOP3$(t_{n_k},s_{n_k},r_{n_k})$)的一个非劣解,$(\boldsymbol{x}_{n_k},\boldsymbol{w}_{n_k},\boldsymbol{y}_{n_k})\to(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}',\boldsymbol{y}')(k\to\infty)$, $(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{w}',\boldsymbol{y}')$是(BLMOP1)的可行解,且 $\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')=\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}^*,\bar{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{w}^*))$.

证明. 设 y_n 是问题(P1($x^*,w^*;r_n$))的最优解,则 $\lim\limits_{n\to\infty}q(x^*,w^*,y_n;\ t_n,s_n,r_n)=f_0(x^*,\bar{y}(x^*,w^*))$.

由于(x^*,w^*,y_n)在函数 q 的定义域内,故对每个(t_n,s_n,r_n)都存在(MOP3(t_n,s_n,r_n))的非劣解(x'_n,w'_n,y'_n),使得

$$q(x'_n,w'_n,y'_n;\ t_n,s_n,r_n)\leqq q(x^*,w^*,y_n;t_n,s_n,r_n),$$

这里当(x^*,w^*,y_n)是(MOP3(t_n,s_n,r_n))的非劣解时,就取(x'_n,w'_n,y'_n)=(x^*,w^*,y_n). 于是

$$f_0(x'_n,y'_n)\leqq q(x^*,w^*,y_n;t_n,s_n,r_n). \tag{3}$$

由定理 2,(x'_n,w'_n,y'_n)存在极限点(x',w',y'),且(x',w',y')是(BLMOP1)的可行解. 设$\{(x'_{n_k},w'_{n_k},y'_{n_k})\}$是收敛到($x',w',y'$)的子序列,对(3)式关于该子序列取极限,得

$$f_0(x',y')\leqq f_0(x^*,\bar{y}(x^*,w^*)).$$

由于($x^*,w^*,\bar{y}(x^*,w^*)$)是(BLMOP1)的非劣解,故 $f_0(x',y')=f_0(x^*,\bar{y}(x^*,w^*))$. 证毕.

5 结论

目前,在两层多目标规划的理论研究成果较少的情况下,本文建立的罚函数理论丰富了两层多目标规划的理论. 在此基础上,笔者已提出了一种求解两层多目标规划问题的有效算法[12],可以为解决实际中的两层多目标决策问题提供有力的工具,限于篇幅,不拟在此叙述.

参 考 文 献

1 Balakrishnan A V. Techniques of Optimization. New York: Academic Press, 1972. 455—466

2 夏洪胜,盛昭瀚,徐南荣. 一种两层非线性多目标决策方法. 控制与决策,1992,**7**(1):277—282

3 盛昭瀚,梁梁,徐南荣. 基于 Stackelberg 对策的两层多目标决策. 自动化学报,1993,**19**(6):691—697

4 仲伟俊,徐南荣. 两层决策的波尔兹曼机方法. 系统工程学报,1995, **10**(1): 7—13

5 杨丰梅. 双层多目标规划问题的 Pareto 有效解. 北京化工大学学报,1994, **21**(3): 79—85

6 Shimizu K, Aiyoshi E. A new computational method for Stackelberg and min-max problems by use of a penalty method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, **26**(2): 460—466

7 Aiyoshi E, Shimizu K. Hierarchical decentralized systems and its new solutions by a barrier method. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1981, **11**(4): 444—449

8 Aiyoshi E, Shimizu K. A solution method for the static constrained Stackelberg problem via penalty method. *IEEE Transactions on Automatic control*, 1984, **29**(12): 1111—1114

9 Ishizuka Y, Aiyoshi E. Double penalty method for bilevel optimization problems. *Annals of Operations Research*, 1992, **24**: 73—88

10 White D J. Multiobjective programming and penalty functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1984, **43**(4):. 583—599

11 汪寿阳. 多目标最优化中的罚函数定理. 中国科学院研究生院学报,1986, **3**(2): 1—5

12 赵 蔚. 两层多目标规划理论与方法研究[学位论文]. 北京:中国科学院自动化研究所,1995

PENALTY FUNCTION METHOD FOR BILEVEL MULTIOBJECTIVE PROGRAMMING

ZHAO WEI

(*Department of Management Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing* 100876)

Abstract In this paper, a class of nonlinear bilevel multiobjective programming problems is studied. Under the assumptions that the objective functions are strictly convex and the constraint set of decision variables is convex, by transforming the bilevel multiobjective programming problem into a series of one-level multiobjective programming problems, the penalty function method for bilevel multiobjective programming is established, and the convergence of the method is proved. This method complements the theory of bilevel multiobjective programming and provides a powerful means to solve the practical bilevel multiobjective decision making problems

Key words Bilevel programming, multiobjective programming, penalty function.

赵　蔚　1968 年生，1989 年毕业于北京理工大学应用数学与计算机专业，1992 年获自动控制理论及应用专业硕士学位，1995 年获中国科学院自动化研究所自动控制理论及应用专业博士学位. 现为北京邮电大学讲师，主要研究领域为系统最优化、多层决策、邮电管理等.