

# 直线参数化方式的优化设计<sup>1)</sup>

胡占义 杨长江 汪 威 马颂德

(中国科学院自动化研究所国家模式识别实验室 北京 100080)

**摘 要** 提出了一条设计直线参数化方式的新标准——递归性标准,它和作者在“Three conditions of a good line parameterization”文中提出的唯一性、有界性、均匀性三条标准一起构成了评价直线参数化方式优劣的新框架. 根据上述四条标准,证明了不存在同时满足这四条标准的直线参数化方式和直线参数化方式  $c = ax + (a_0 - |a|)y, a \in [-a_0, a_0)$  不但满足唯一性、有界性和递归性标准,而且可以获得均匀性标准的最优近似.

**关键词** Hough 变换, 直线参数化方式, 唯一性标准, 有界性标准, 均匀性标准, 递归性标准.

## 1 引言

自 60 年代初 Hough 变换<sup>[1,2]</sup>提出以来,由于该方法受随机噪声影响小,对部分遮盖现象不敏感而且适合于并行处理,因此在计算机视觉和模式识别等方面获得了广泛的应用.

Hough 变换从本质上来说是广义匹配策略(即样板匹配)的一种有效实现. 当欲检测的线条形状可以用解析式表示时,图像空间内的一条直线映射为参数空间的一点,该点的坐标反映了原直线的参数,因而唯一地代表了这条直线.

Hough 变换的性能与所使用的参数化方式有密切的依赖关系. 到目前为止,文献中已提出多种直线参数化方式<sup>[3-6]</sup>,而且越来越多的新参数化方式在不断提出. 因此,怎样评价这些参数化方式的优劣以及设计更合理的参数化方式是一个急需解决的问题. 本文提出的递归性标准和作者在文献[5]提出的唯一性、有界性和均匀性三条标准一起构成了一个评价和设计直线参数化方式的新框架,旨在解决上述问题.

## 2 设计评价直线参数化方式的四条标准

### 2.1 唯一性标准

在这四条标准当中,唯一性标准是任何参数化方式的基本要求. 满足唯一性标准意味着 Hough 空间里的每一点和图像空间中的一条直线构成一一对应关系. 如果单纯从数学角度出发,任何直线参数化方式只要满足唯一性标准就行了,但是考虑到 Hough 变换的固有特征以及它在计算机上实现的方便,就需要考虑其它三条标准.

### 2.2 有界性标准

有界性标准旨在方便 Hough 变换在计算机上的实现. 其基本思想是将一个有界的图像空间变换为一个有界的参数空间(Hough 空间). 因为 Hough 空间在大多数情况下由累加器单元

1) 本文得到国家“八六三”高技术发展计划及国家自然科学基金资助.

收稿日期 1996-05-06

组成,而且有界性标准保证了累加器数目为有限个,这就为 Hough 变换在计算机上的实现提供了条件.

### 2.3 均匀性标准

Hough 变换用于直线提取时,其本质就是使图象空间的每个特征点对所有通过该特征点直线的参数点“投票”.所有特征点投票结束后,“得票率”高的参数点表示在图象空间该参数点确定的直线可能存在.均匀性是指在具体实现时,假定有  $K$  条直线通过一个特征点,要求所有相邻两直线的夹角都相等.由于从理论上来说,给定一个特征点,可能有无穷多直线通过这一点,在这种情况下,相邻直线间夹角的概念就失去了意义,需要引入量化变量<sup>1)</sup>的密度函数这个概念来进行描述.此时均匀性是指当直线用标准参数化方式(在标准参数化方式下,直线方程为  $\rho = x\cos\theta + y\sin\theta, \theta \in [0, \pi)$ )表示时,变量  $\theta$  的密度函数应该是均匀分布  $f(\theta) = 1/\pi$ .当直线用其它参数化方式表示时,通过标准参数化方式与该参数化方式之间的对应关系,可以求得该参数化方式下量化变量的密度函数,均匀性标准要求该量化变量的密度函数为均匀分布<sup>2)</sup>.均匀性标准是 Hough 变换的固有要求,违反这条标准会导致错误的检测结果,从而降低了 Hough 变换的可靠性.

### 2.4 递归性标准

递归性标准是为了有效地减少计算量.一般进行 Hough 变换时,它的核心计算量是对于图象空间内的每个特征点,按量化变量逐一计算应计数的累加器单元的坐标,一般需要进行多次乘法或更复杂的运算,计算量大.递归性标准可以减少计算量,它要求在量化变量均匀量化时,需计数的累加器单元坐标可以通过递归的方法来计算,只需进行一次加法运算,不涉及乘法或更复杂的运算.

上述四条标准中前两条标准大部分参数化方式都能满足,而均匀性标准,尽管它是 Hough 变换的固有要求,却一直没有引起应有的重视.

## 3 运用四条标准设计直线参数化方式

直线的一般表达式是 
$$c = ax + by, \quad (1)$$

其中  $a^2 + b^2 \neq 0$ .式(1)不能构成一个直线参数化方式,这是因为其中的参数( $a, b, c$ )和直线不能构成一一对应关系.为了使式(1)成为一种直线参数化方式并具有较好的性能,就必须在参数  $a$  和  $b$  之间加上一定的约束条件.

### 3.1 满足唯一性标准的条件

为了使式(1)满足唯一性标准,参数  $a$  和  $b$  必须要满足如下约束(如图 1(a)所示)

1)在 Hough 变换下,图象空间的一个特征点在参数空间映射为一条曲线.在具体实现时,总是通过均匀量化某一变量(如直线参数化方式的二个变量之一,曲线的长度等)来实现上述连续曲线的离散化,该变量称为量化变量.例如在标准参数化方式下,图象空间的一个特征点( $x_i, y_i$ )映射为参数空间内的一条正弦曲线  $\rho = x_i\cos\theta + y_i\sin\theta, \theta \in [0, \pi)$ .这条正弦曲线在文献中总是通过对变量  $\theta$  的均匀离散来实现采样.即  $\rho_{ij} = x_i\cos\theta_j + y_i\sin\theta_j$ ,其中  $\theta_j = j\Delta\theta, \Delta\theta = \pi/N, j = 0, 1, \dots, N$ ,则  $\theta$  在这里为量化变量.

2)例如直线在斜率-截距参数化方式下可表示为  $y = ax + b$ .当选择变量  $a$  为量化变量时,由于标准参数化方式与斜率-截距参数化方式存在关系  $a = -\cos\theta/\sin\theta$ ,从  $f(\theta) = 1/\pi$ ,可以得到  $f(a) = 1/\{\pi(1+a^2)\}$ .显然  $f(a)$  不是均匀分布,所以斜率-截距参数化方式不满足均匀性标准.

$$\begin{cases} a = f(\theta)\cos\theta, \\ b = f(\theta)\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, \pi), \quad (2)$$

其中  $f(\theta)$  是  $\theta$  的任意单值连续函数.

证明. 考虑标准参数化方式<sup>[9]</sup>

$$\rho = x\cos\theta + y\sin\theta, \quad \theta \in [0, \pi), \quad (3)$$

其中  $a = \cos\theta, b = \sin\theta$ , 如图 1(b) 所示, 约束曲线为半圆. 从图 1(b) 容易看出, 如果  $f(\theta)$  是单值连续函数, 那么式(2)定义的约束曲线和半圆之间存在一一对应关系. 由于标准参数化方式满足唯一性标准, 所以满足式(2)的参数化方式(1)也满足唯一性标准.

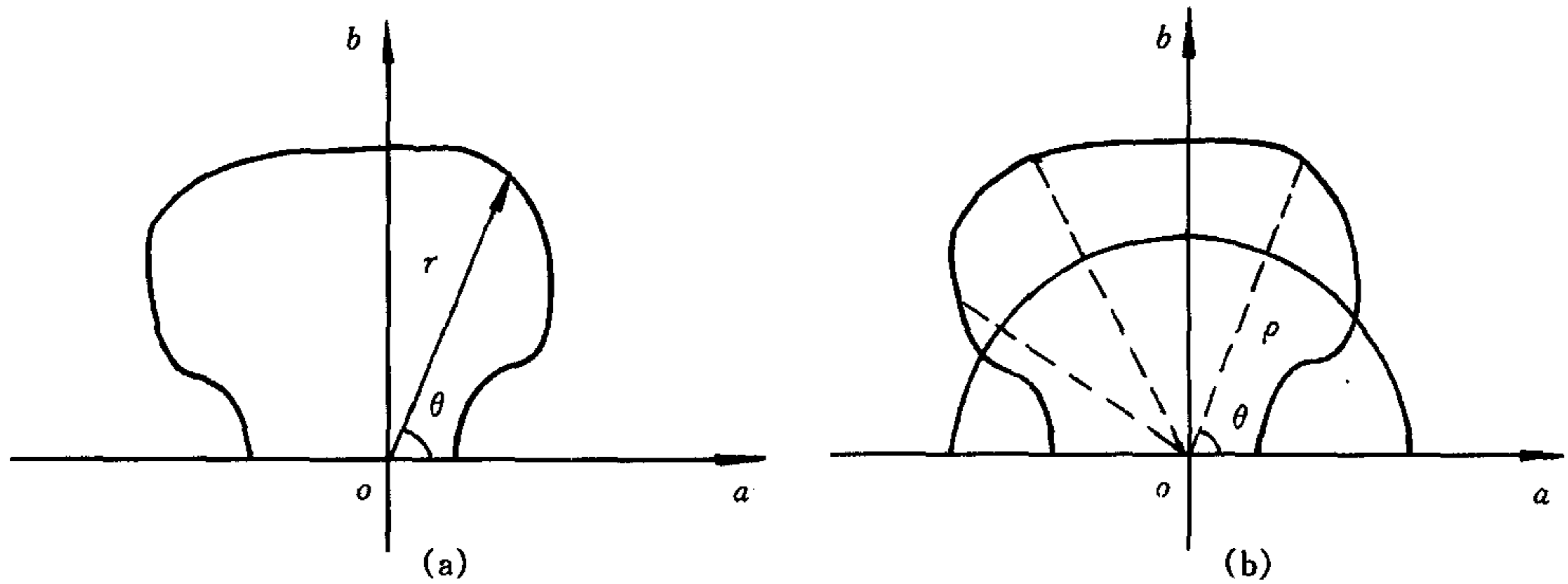


图 1  $a$  和  $b$  的约束曲线和半圆一一对应

### 3.2 满足有界性标准的条件

如果式(2)中的  $f(\theta)$  是有界函数, 则式(1)满足有界性标准, 即

$$|f(\theta)| \leq M, \quad \theta \in [0, \pi), \quad (4)$$

其中  $M$  是一个足够大的正数.

证明. 设参数化方式(1)满足条件(4), 那么根据式(2)有  $|a| \leq M, |b| \leq M$ . 由于图象空间是有界的,  $|x| \leq M_{xy}, |y| \leq M_{xy}$ , 其中  $M_{xy}$  是一个足够大的正数. 因此  $|c| = |ax + by| \leq |a| \cdot |x| + |b| \cdot |y| \leq 2MM_{xy}$ . 根据有界性标准的定义, 该直线参数化方式满足有界性标准.

例如, 约束曲线为半圆  $f(\theta) = R (\theta \in [0, \pi))$  所对应的参数化方式满足有界性标准; 反之, 对于斜率-截距参数化方式  $y = ax + b$ , 约束曲线是  $b = 1, a \in (-\infty, \infty)$ , 在极坐标下  $f(\theta) = 1/\sin\theta (\theta \in [0, \pi))$  是无界函数, 因此它不满足有界性标准.

### 3.3 满足均匀性标准的条件

根据均匀性标准的要求, 首先要确定量化变量, 这里的量化变量可以是  $a, b$  或  $s$  ( $s$  是曲线  $r = f(\theta)$  的长度). 如果以  $a$  作为量化变量, 则根据均匀性标准的要求, 量化变量  $a$  和  $\theta$  应该成线性关系, 即  $a = k_1\theta + k_0$ , 再由式(2)可得  $a, b$  间的约束应为  $f(\theta) = (k_1\theta + k_0)/\cos\theta$ , 即

$$\begin{cases} a = k_1\theta + k_0, \\ b = (k_1\theta + k_0)\tan\theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, \pi/2), \quad (5)$$

其中  $k_0, k_1$  是常数,  $\theta$  是图象平面内直线与  $x$  轴正方向的夹角. 如果以  $s$  作为量化变量, 则  $a, b$  间的约束曲线应为半圆  $f(\theta) = R$ , 即

$$\begin{cases} a = R\cos\theta, \\ b = R\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, \pi). \quad (6)$$

这时参数化方式(6)实际上相当于 Hough 变换的标准参数化方式<sup>[9]</sup>.

### 3.4 满足递归性标准的条件

根据递归性标准的定义,参数化方式(1)要满足递归性标准, $a, b$  间的约束曲线应是一个线性或分段线性的函数.

证明.

(i) 如果  $a, b$  间的约束是一条直线,则参数化方式(1)能够递归地计算. 设  $b = k_1 a + k_0$ ,  $a \in [0, a_0)$ , 其中  $k_0, k_1$  是常数, 则参数化方式(1)成为  $c = ax + (k_1 a + k_0)y$ . 如果参数  $a$  在区间  $[0, a_0)$  上分成  $K$  等分, 那么

$$\begin{aligned} a_i &= i\Delta a, \quad c_i = a_i x + (k_1 a_i + k_0)y, \\ c_{i+1} &= a_{i+1} x + (k_1 a_{i+1} + k_0)y = c_i + \Delta a(x + k_1 y) = c_i + \Delta c, \\ \Delta c &= \Delta a(x + k_1 y), \end{aligned}$$

其中  $\Delta a = a_0/K, i = 0, 1, 2, \dots, K-1$ . 对于一个给定的图象点  $(x, y)$ ,  $\Delta c$  是一个常数, 因此参数  $c$  能够递归地计算, 也就是说参数  $c$  的值由上次计算的结果只做一次加法运算就可以得到.

(ii) 如果参数化方式(1)满足递归性标准, 那么  $a, b$  间的约束  $b = f(a)$  必须是线性函数(假定  $f(a)$  是可微的). 设参数  $a$  在区间  $[0, a_0)$  上均匀量化成  $K$  等份时, 参数  $c$  在区间  $[C_0, C_K)$  上可以递归地计算, 即  $c_{i+1} = c_i + \Delta c$ , 其中  $\Delta c = (C_K - C_0)/K$  是常数, 于是

$$\begin{aligned} c_i &= a_i x + f(a_i)y, \quad c_{i+1} = a_{i+1} x + f(a_{i+1})y, \\ \Delta c &= \Delta a x + [f(a_{i+1}) - f(a_i)]y, \\ f'(a) &= \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{f(a_{i+1}) - f(a_i)}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta c - \Delta a x}{\Delta a y} = \frac{C_K - C_0 - a_0 x}{a_0 y} = \text{const}, \end{aligned}$$

其中  $(x, y)$  是特征点坐标. 因此  $f(a)$  是线性函数.

例如, 斜率-截距参数化方式、 $(\gamma, \beta)$  参数化方式<sup>[7]</sup>、 $(\gamma, \omega)$  参数化方式<sup>[8]</sup> 都符合递归性标准.

### 3.5 直线参数化方式的设计及评估

从式(5)可以看出, 直线参数化方式(1)不能同时满足均匀性标准和递归性标准, 只能在它们之间寻求一种折衷的方法. 下面将提出一个度量标准, 以衡量直线参数化方式符合均匀性标准的程度.

考虑式(1)中参数约束曲线为  $|a|/a_0 + b/b_0 = 1, a \in [-a_0, a_0)$  的情况, 于是参数化方式(1)变成

$$c = ax + (1 - |a|/a_0)b_0 y, \quad a \in [-a_0, a_0). \quad (7)$$

参数化方式(7)显然满足唯一性、有界性和递归性标准, 但是它不满足均匀性标准. 为了衡量直线参数化方式(7)符合均匀性标准的程度, 引进一个度量标准

$$J(a_0, b_0) = \sum_{i=-(K-1)}^{K-1} ||\Delta\theta_i| - \overline{\Delta\theta}|. \quad (8)$$

其中  $K$  是量化级数, 参数  $a$  在区间  $[-a_0, a_0)$  上均匀量化成  $(2K-1)$  等份,  $|\Delta\theta_i|$  表示图象空间内对应  $a_i$  和  $a_{i+1}$  两直线间的夹角,  $\overline{\Delta\theta} = \pi/(2K-1)$ . 如果  $J(a_0, b_0)$  越小, 参数化方式(7)就越符合均匀性标准, 当  $J(a_0, b_0)$  达到极小值时, 参数化方式(7)就获得最优的均匀性.

考虑到数学上处理的方便和实际应用中  $K$  相当大, 可以认为参数空间是连续的, 因而经过对应的图象空间某一点的直线就有无数条, 因此可以采用概率密度函数来描述直线参数化

方式的均匀性程度. 设参数  $a$  的密度函数是  $D(a)$ ,  $\theta$  的密度函数是  $D(\theta)$ . 如果采用参数  $a$  作为量化变量,  $D(a)$  是均匀分布, 那么  $D(\theta)$  一定不是均匀分布. 为了衡量直线参数化方式均匀程度, 采用  $D(\theta)$  的方差作为度量的标准

$$V(a_0, b_0) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (D(\theta) - m(\theta))^2 d\theta, \quad (9)$$

其中  $[\theta_1, \theta_2]$  是相应的度量区间,  $D(\theta)$  是  $\theta$  的密度函数,  $m(\theta) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} D(\theta) d\theta$  是  $\theta$  在区间  $[\theta_1, \theta_2]$  上的均值.

对于如图 2(b) 所示的度量区间  $[\theta_1, \theta_2]$  的线性约束, 度量标准(9)为

$$V(a_0, b_0) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \frac{1}{T} \left| \frac{da}{d\theta} \right| - \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \right)^2 d\theta. \quad (10)$$

其中  $a = \frac{a_0 b_0}{a_0 \tan \theta + b_0}$ ,  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ ;  $T = a_0 b_0 \left( \frac{1}{b_0 + a_0 \tan \theta_1} - \frac{1}{b_0 + a_0 \tan \theta_2} \right)$ ;  $D(a) = 1/T$ ;  $D(\theta) = D(a) \left| \frac{da}{d\theta} \right| = \frac{1}{T} \left| \frac{da}{d\theta} \right|$ ;  $m(\theta) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{T} \left| \frac{da}{d\theta} \right| d\theta = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$ .

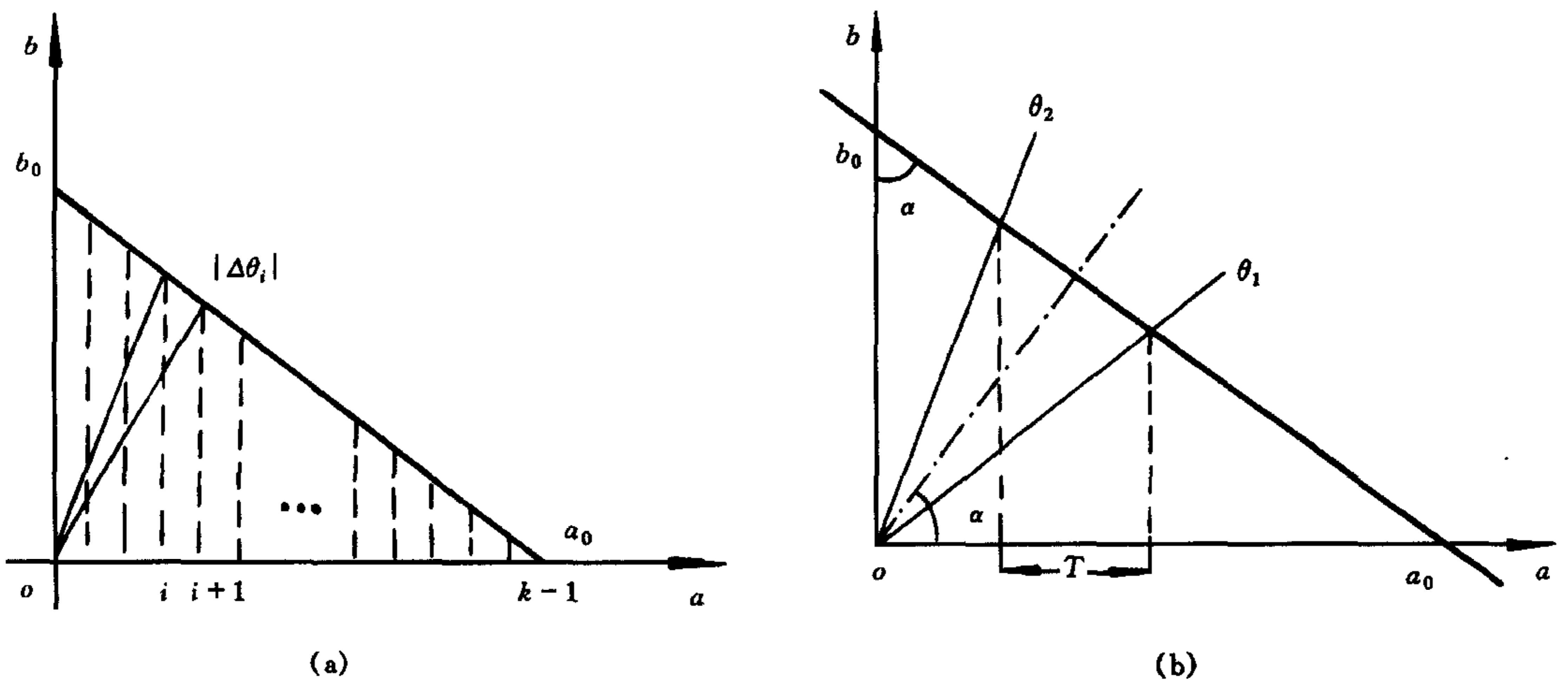


图 2 两种度量标准的示意图

可以证明, 度量标准(10)具有如下性质:

- 1) 非负性, 即对任何有  $a_0, b_0$ , 有  $V(a_0, b_0) \geq 0$ .
- 2) 平移不变性, 即将约束直线平行移动,  $(a_0, b_0)$  的值不变.

证明. 令  $\tan \alpha = a_0/b_0$  (如图 2(b) 所示), 则

$$\begin{aligned} V(a_0, b_0) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left( \frac{1}{T} \frac{a_0^2 b_0}{(a_0 \sin \theta + b_0 \cos \theta)^2} - \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \right)^2 d\theta \\ &= \frac{\cos^2(\theta_1 - \alpha) \cos^2(\theta_2 - \alpha) \sin^2 \alpha}{[\cos \theta_1 \cos(\theta_2 - \alpha) - \cos \theta_2 \cos(\theta_1 - \alpha)]^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^4(\theta - \alpha)} - \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} = V(\alpha). \end{aligned} \quad (11)$$

从式(11)可以看出,  $V(a_0, b_0)$  只和  $\alpha$  有关. 所以当约束直线  $a_0 b_0$  平行移动时,  $\tan \alpha = a_0/b_0$  不变,  $\alpha$  也不变, 因此  $V(a_0, b_0)$  的值不变.

3)当约束直线是 $[\theta_1, \theta_2]$ 间圆弧的弦时,  $V(a_0, b_0)$ 取到极小值(如图 3).

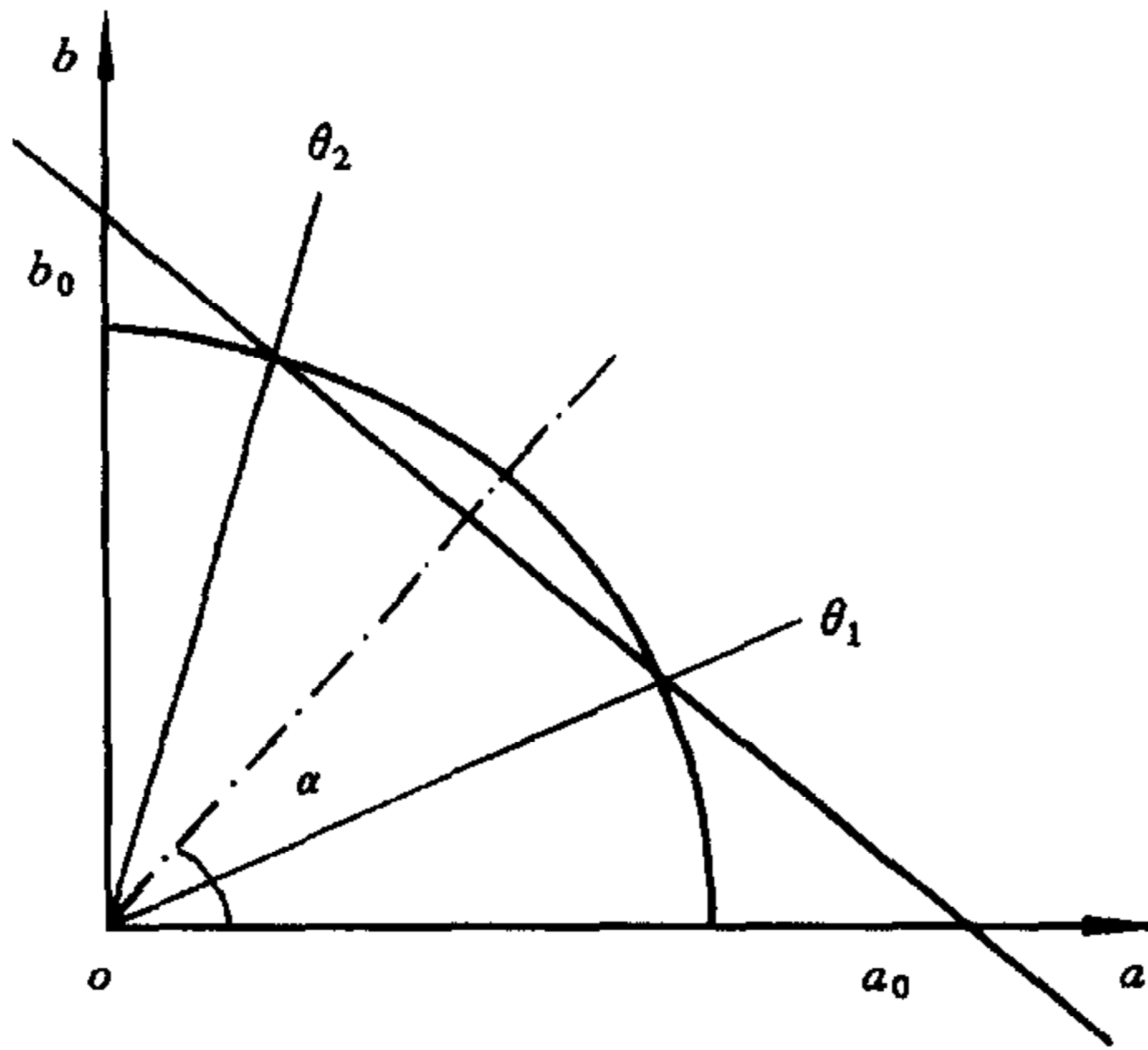


图 3 性质 3)的示意图

证明. 利用式(11), 由  $\frac{d}{d\alpha}V(a_0, b_0) = \frac{d}{d\alpha}V(\alpha) = 0$ ,

得  $\alpha = (\theta_1 + \theta_2)/2$ , 此时

$$V_{\min}(a_0, b_0) = \frac{2 + \cos(\theta_2 - \theta_1)}{3\sin(\theta_2 - \theta_1)} - \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$$

关于它的详细证明可以参见文 1). 同时还可以证明当  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \rightarrow 0$  时, 约束直线无限逼近圆弧,  $V_{\min}(a_0, b_0) = 0$ , 即在此极限情形下, 它完全符合均匀性标准.

根据上面的结果, 可以得到下面两条命题.

**命题 1.** 直线参数化方式(7)获得最优的均匀性, 当且仅当  $a_0 = b_0$ , 约束为  $|a| + b = a_0$ . 此时相应的参数化方式是  $c = ax + (a_0 - |a|)y, a \in [-a_0, a_0)$ .

证明. 由对称性, 只考虑  $a \geq 0$  的情况. 令度量标准(10)中的  $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2$ , 根据上面的性质 3), 可得当  $\alpha = \pi/4, \tan\alpha = a_0/b_0 = 1, a_0 = b_0$  时,  $V_{\min}(a_0, b_0) = V(a_0 = b_0) = 2/3 - 2/\pi$ .

该命题说明, 虽然直线参数化方式  $c = ax + (a_0 - |a|)y, a \in [-a_0, a_0)$  不能完全满足均匀性标准, 但它是均匀性标准的最优近似.

**命题 2.** 如果直线参数化方式(1)在  $\theta \in [\theta_0, \theta_N]$  间的约束曲线是  $N$  段折线, 那么它获得最优均匀性的充要条件是折线的  $N+1$  个端点在圆弧  $[\theta_0, \theta_N]$  上, 并且等分这段圆弧(如图 4). 也就是, 当  $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 = \dots = \Delta\theta_N = (\theta_N - \theta_0)/N$ , 其中  $\Delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_0, \dots, \Delta\theta_N = \theta_N - \theta_{N-1}$ , 度量标准

$$V(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{2 + \cos\Delta\theta_i}{3\sin\Delta\theta_i} - \frac{1}{\Delta\theta_i} \right) \text{ 达到极小值 } V_{\min} = N \left[ \frac{2 + \cos\Delta\theta}{3\sin\Delta\theta} - \frac{1}{\Delta\theta} \right], \text{ 其中 } \Delta\theta = (\theta_N - \theta_0)/N.$$

当  $N \rightarrow \infty$  时, 这条折线无限逼近圆弧,  $V_{\min} = 0$ , 也就是说此时它完全符合均匀性标准. 证明可以利用性质 2) 和 3), 具体的证明可以参见文 1).

可以证明下面三种直线参数化方式

1) 斜率-截距参数化方式

$$y = ax + b, a \in [-1, 1],$$

2)  $(\gamma, \beta)$  参数化方式<sup>[7]</sup>

$$\gamma = \beta x + (1 - \beta)y, \beta \in [0, 1],$$

3)  $(\gamma, \omega)$  参数化方式<sup>[8]</sup>  $\gamma = \alpha\omega y + x,$

$\omega \in [-1/\alpha, 1/\alpha]$  均满足唯一性、有界性和递归性标准. 在度量标准(10)下, 它们的方差都相等, 也就是说在均匀性标准下, 这三种参数化方式是等价的.

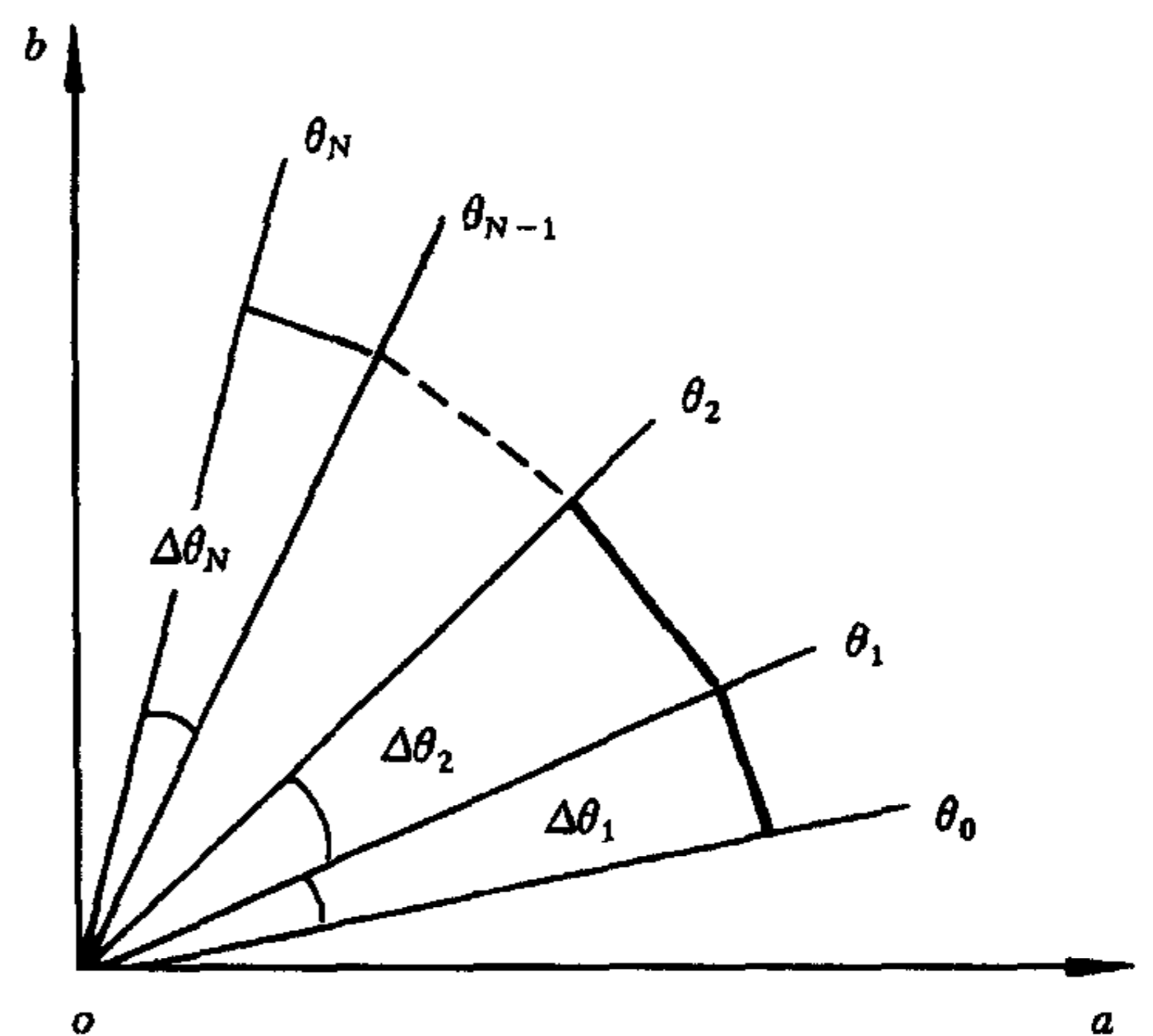


图 4 约束曲线采用  $N$  段折线

1) Hu Z, Wang W, Yang C J, Ma S D. A framework for the design of new line parameterization. Technical Report 1996, National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences

## 4 结论

基于唯一性、有界性、均匀性及递归性四条标准,本文提出了一种设计及评价直线参数化方式优劣的新框架.研究表明,同时满足上述四条标准的直线参数化方式并不存在;直线参数化方式  $c=ax+(a_0-|a|)y, a \in [-a_0, a_0)$  ( $a_0$  是一任意正数),不但满足唯一性、有界性和递归性标准,而且可以获得均匀性标准的最优近似.

值得指出的是,本文只对形如式(1)的直线参数化方式进行了讨论.如果量化参数  $a$  是其它变量的函数,例如在标准参数化方式<sup>[9]</sup>  $\rho=x\cos\theta+y\sin\theta$  中,  $a=\cos\theta, b=\sin\theta$ , 或者在 Hough 变换扩展形式下<sup>[10]</sup>, 如何设计及评估不同直线参数化方式将变得十分复杂,本文不再加以讨论.

## 参 考 文 献

- 1 Hough P V C. A method and means for recognizing complex patterns. U. S. Patent 3,069,654,1962
- 2 Ballard D H. Generalizing the Hough transform to detect arbitrary shapes. *Pattern Recognition*,1981,**13**:111—122
- 3 Maitre H. Contribution to the prediction of performances of the Hough transform. *IEEE Trans. PAMI*,1986,**8**:669—674
- 4 Hu Z, Destine J. Performance comparison of line parameterizations. In: Proceedings 11th International Conference on Pattern Recognition,1992,**3**:335—338
- 5 Hu Z, Ma S D. Three conditions of a good line parameterization. *Pattern Recognition Letters*,1995,**16**:385—388
- 6 Hu Z, Ma S D. Uniform line parameterization. *Pattern Recognition Letters*, 1996,**17**:503—507
- 7 Li B C. A new parameters of a straight line. In: Proc. Asian Conf. on Computer Vision. Osaka, Japan: 1993. 1—4
- 8 Wada T, Matsuyama T,  $\gamma$ - $\omega$  Hough transform-Elimination of quantization noise and linearization of voting curves in the  $(\rho, \theta)$  parameter space. In: proc. 11th Inter. Conf. on Pattern Recognition, 1992. 272—275
- 9 Duda R D, Hart P E. Use of the Hough transform to detect lines and curves in pictures. *CACM*,1972,**15**:11—15
- 10 Koshimizu H, Numada M, Murakami K. On the warp model of Hough transform-For designing transform functions of EHT, In: Proc. Asian Conf. on Computer Vision. Osaka, Japan:1993,676—679

## THE OPTIMAL DESIGN OF LINE PARAMETERIZATION

HU ZHANYI YANG CHANGJIANG WANG WEI MA SONGDE

(National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

**Abstract** In this paper, a new criterion, namely recursiveness, is introduced, which along with the three criteria previously introduced by Hu Z et al in his paper “Three conditions of a good line parameterization”, (i. e. , uniqueness, boundedness and uniformness) makes up a new framework for the design of line parameterizations. By the above four criteria, it is proved that there does not exist a line parameterization which could satisfy all the four criteria at the same time, and that the line parameterization, formulated as  $c=ax+(a_0-|a|)y, a \in [-a_0, a_0)$ , where  $a_0$  is an arbitrary positive number, can not only satisfy the uniqueness, boundedness, and recursiveness criteria, but also achieve the best goodness to the uniformness one.

**Keywords** Hough transform, line parameterization, uniqueness, boundedness, uniformness, recursiveness.

**胡占义** 1961 年生于山西省,1985 年毕业于北方工业大学自动化系,1988 年和 1993 年先后于比利时 Liege 大学获工学硕士和博士学位. 现为中国科学院自动化所模式识别国家重点实验室研究员. 主要研究方向为图象处理、计算机视觉、模式识别.

**杨长江** 1974 年生于安徽省,1996 年毕业于中国科学技术大学自动化系,现在中国科学院自动化所模式识别国家重点实验室攻读硕士学位. 主要研究方向为图象处理、计算机视觉、模式识别.

**汪 威** 1972 年生于湖北省,1994 年毕业于浙江大学计算机系,1997 年于中国科学院自动化所获硕士学位. 主要研究方向为图象处理、计算机视觉、模式识别.

**马颂德** 1946 年生于上海,1969 年毕业于清华大学自动化系,1983 年和 1986 年先后于法国 Paris VI 大学获硕士和博士学位. 1983—1984 年为 Maryland 大学计算机视觉实验室访问学者. 1984—1986 年为法国 INRIA 机器人视觉组访问学者. 现任中国科学院自动化所所长,模式识别国家重点实验室主任,研究员,博士生导师,IEEE 高级会员. 主要研究方向为计算机视觉、神经计算、图象合成和机器人控制.