第 24 卷 第 3 期 自 动 化 学 报 Vol. 24, No. 3
1998 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May., 1998

# 基于 LMI 的一类混合 $H^2/H^\infty$ 控制问题的降阶控制器设计——连续情形[1)]

郭 雷 忻 欣 冯纯伯
（东南大学自动化研究所 南京 210096）

**摘 要** 考虑连续系统的一类混合 $H^2/H^\infty$ 控制问题，对于含无穷远零点和有限虚轴零点的奇异广义对象，引入线性矩阵不等式(LMI)方法研究了降阶控制器存在判据和设计准则. 文中指出，对于所述对象，若混合 $H^2/H^\infty$ 控制问题可解，则它必存在降阶控制器. 存在准则和设计方法分别归结到 LMI 的可解性及其凸优化解法.

**关键词** 连续系统，$H^\infty$ 控制，混合 $H^2/H^\infty$ 控制，矩阵不等式，降阶控制器.

## 1 引言

考虑如图 1 所示系统.

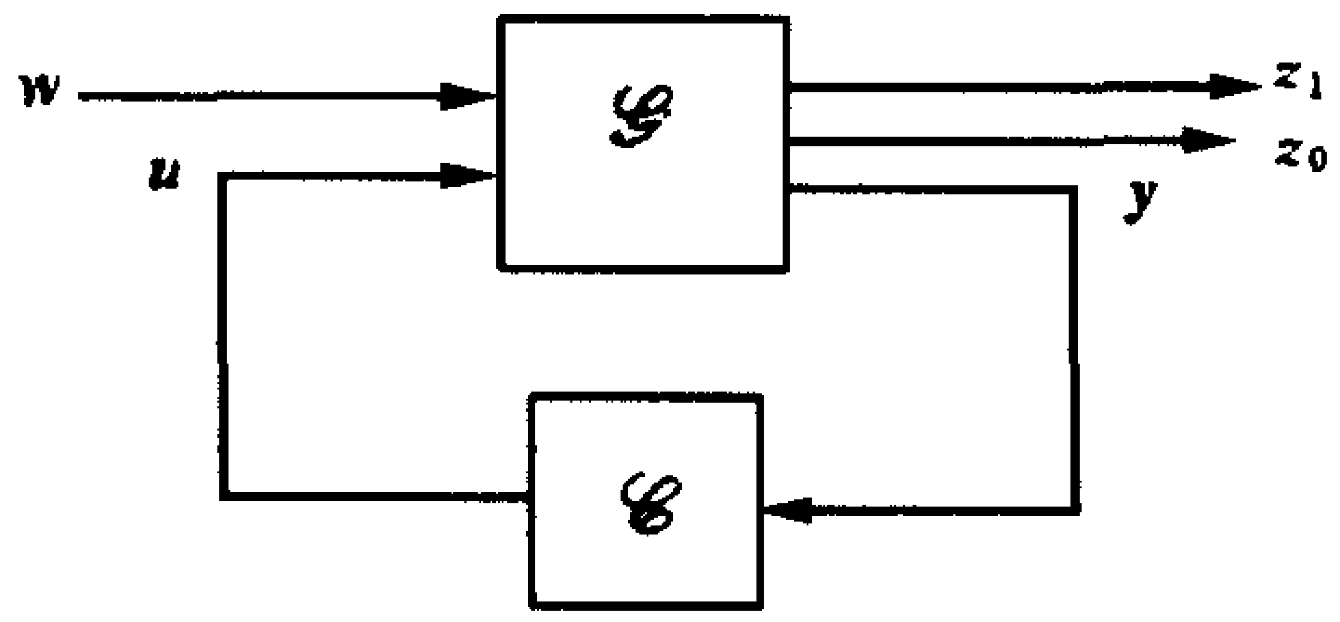


图 1

设广义对象 $\mathscr{G}$ 和 $n_c$ 阶动态输出反馈控制器 $\mathscr{C}$ 的动态方程分别为

$$\mathscr{G}:=\begin{cases}\dot{x}=Ax+B_1w+B_2u,\\ z_0=C_0x+D_{02}u,\\ z_1=C_1x+D_{12}u,\\ y=C_2x+D_{21}w,\end{cases}\qquad \mathscr{C}:=\begin{cases}\dot{x}_c=A_cx_c+B_cy,\\ u=C_cx_c+D_cy.\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x\in R^n, w\in R^{m_1}, u\in R^{m_2}, y\in R^{p_2}$ 分别表示状态、外部输入、控制和量测信号；$z_0\in R^{p_0}, z_1\in R^{p_1}$ 分别表示与 $H^2$ 和 $H^\infty$ 指标有关的被控向量.

闭环系统为

$$\mathscr{C}_{cl}:=\begin{cases}\dot{\hat{x}}=F\hat{x}+Gw,\\ z_0=H_0\hat{x}+J_0w,\\ z_1=H_1\hat{x}+J_1w,\end{cases}\tag{2}$$

1) 得到国家自然科学基金和国家教委留学回国人员专项基金资助.

收稿日期 1995-07-03

其中

$$\begin{bmatrix} F & G \\ H_0 & J_0 \\ H_1 & J_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 \\ \hat{C}_0 & 0 \\ \hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ \hat{D}_0 \\ \hat{D}_{12} \end{bmatrix} \hat{U} ( \hat{C}_2 \quad \hat{D}_{21} ), \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_0 & 0 & \hat{D}_0 \\ \hat{C}_1 & 0 & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{U}^T \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & 0 & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_c} \\ C_0 & 0 & 0 & D_{02} & 0 \\ C_1 & 0 & 0 & D_{12} & 0 \\ C_2 & 0 & D_{21} & D_c^T & B_c^T \\ 0 & I_{n_c} & 0 & C_c^T & A_c^T \end{bmatrix}. \tag{4}$$

设 $T_{z_i w}$ 是 $w$ 到 $z_i$ 的闭环传递函数阵, $i=0,1$.

**定义 1**. 称 $\mathscr{C}$ 对 $\mathscr{G}$ 是可允的当且仅当 $\mathscr{C}$ 使闭环系统内稳. 记所有可允的 $\mathscr{C}$ 的集合为 $\mathscr{A}(\mathscr{G})$. 设 $\gamma>0$, 记 $\mathscr{A}_\infty(\mathscr{G}) := \{\mathscr{C} \in \mathscr{A}(\mathscr{G}) : \|T_{z_1 w}\|_\infty < \gamma\}$.

设 $L_c$ 为 $(F,G)$ 的可控性 Gramian 矩阵, 则 $\|T_{z_0 w}\|_2 = tr(H_0 L_c H_0^T)$. 定义 $M := \gamma^2 I - J_1 J_1^T$, 设 $P$ 是代数 Riccati 方程(ARE) $R(P)=0$ 的镇定解[1], 其中

$$R(P) := FP + PF^T + (PH_1^T + GJ_1^T)M^{-1}(H_1 P + J_1 G^T) + GG^T. \tag{5}$$

显然有 $\|T_{z_0 w}\|_2 = \mathrm{tr}(H_0 L_c H_0^T) \leqslant \mathrm{tr}(H_0 P H_0^T)$.

**定义 2**[1,2]. 混合 $H^2/H^\infty$ 性能指标是指

$$J(T_{zw}) := \begin{cases} \infty, & J_0 = 0, \\ \mathrm{tr}(H_0 P H_0^T), & J_0 \neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

这里 $J(*)$ 是 $T_{zw}$ 的函数, 因而是 $\mathscr{G},\mathscr{C}$ 的函数, 可记作 $J(\mathscr{G},\mathscr{C})$.

**定义 3**[1,2]. 所谓混合 $H^2/H^\infty$ 控制问题是指

(i)计算 $v(\mathscr{G}) := \inf\{J(T_{zw} : \mathscr{C} \in \mathscr{A}_\infty(\mathscr{G})\}$;

(ii)给定 $\alpha > v(\mathscr{G})$, 求控制器 $\mathscr{C} \in \mathscr{A}_\infty(\mathscr{G})$, 使 $J(T_{zw}) < \alpha$.

对(1)式, 实际上 $z_0$ 仅与 $H^2$ 指标有关, 其余的三个方程是对应于 $H_\infty$ 问题的广义对象, 把这三个联立的方程用 $\mathscr{G}_0$ 表示. 混合 $H^2/H^\infty$ 问题的意义在于可使系统在具有稳定性和鲁棒性的前提下保持良好的性能.

下面的 A1 是存在镇定闭环系统的控制器的必要条件: A1: $(A,B_2,C_2)$ 可镇定可检测.

作为 $H^\infty$ 问题的推广, 混合 $H^2/H^\infty$ 问题是一种重要的鲁棒性能问题[1,2]. 文献[2]首先提出了混合 $H^2/H^\infty$ 问题, 但仅得到了一组充分条件; 文献[3]考虑定义 3 的对偶问题, 其解都归结到耦合的 ARE, 难以计算. 文献[1,4]分别研究了连续和离散系统的混合 $H^2/H^\infty$ 问题, 给出了充分必要条件, 且算法可归结为二元二次矩阵不等式的凸优化问题, 但这些结果都是在对 $\mathscr{G}_0$ 施加额外限制的情况下取得的. 除假设 A1 外, 文献[1]假设 $D_{12}$ 列满秩, $D_{21}$ 行满秩, $(A_1, B_1)$ 可镇定, $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A - jwI & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2, \forall\, w \in R$. 这就限制了混合 $H^2/H^\infty$ 控制的应用. 文献[5]将混合 $H^2/H^\infty$ 指标中的 $H^2$ 指标加以简化(假定 $A0: D_{02}=0$), 但仍保证对系统暂态误差的要求, 且考虑最一般的 $\mathscr{G}_0$. 由于所研究的是最广泛的对象, 考虑的是一类奇异 $H^2/H^\infty$ 控制问题, 因此文献[5]的问题也具有重要的工程和理论意义. 以上这些方法往往只给出阶次不超

过广义对象 McMillan 阶次的控制器的设计准则.

控制器的阶次是涉及能否工程应用的重要因素,目前降阶 $H^2/H^\infty$ 控制器很不充分. 文献[2]讨论的降阶控制器实际只是固定阶控制器,且只是一个充分条件,涉及四个耦合的 ARE,不能保证一定有解. 本文在文献[5,6]的基础上,将研究降阶 $H^2/H^\infty$ 控制器的存在判据和设计准则,并证明在一定条件下,若混合 $H^2/H^\infty$ 问题可解,则必存在降阶控制器. 由于证明是构造性的,可以给出设计方法.

## 2 混合 $H^2/H^\infty$ 可解判据

### 2.1 可解判据

当 $D_{02}=0$ 时,$J(T_{zw})=\inf\{\mathrm{tr}(C_0\quad 0)P(C_0\quad 0)^T\}$,其中 $P$ 是(5)式的镇定解.

**引理 1**[1].

$$J(T_{zw}) = \inf\{\mathrm{tr}((C_0\quad 0)P(C_0\quad 0)^T) : P = P^T, R(P) < 0\}. \tag{7}$$

记

$$\mathscr{L}_B := \left\{X : X \in R^{n\times n}, X = X^T > 0,\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{pmatrix}^{\perp} \begin{pmatrix} AX + XA^T + B_1B_1^T & XC_1^T \\ C_1X & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{pmatrix}^{\perp T} < 0\right\}, \tag{8}$$

$$\mathscr{L}_C := \left\{Y : Y \in R^{n\times n}, Y = Y^T > 0,\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{pmatrix}^{\perp} \begin{pmatrix} YA + A^TY + C_1^TC_1 & YB_1 \\ B_1^TY & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2^T \\ D_{21}^T \end{pmatrix}^{\perp T} < 0\right\}, \tag{9}$$

其中 $E^\perp$ 定义为 $E^\perp E=0$ 且 $E^\perp E^{\perp T}>0$. 显然 $E^{\perp T}=\mathrm{Ker}(E^T)$.

**定理 1.**

$$J(T_{zw}) = \inf\{\mathrm{tr}(C_0XC_0^T) : (X,Y) \in \mathscr{L}_D\}, \tag{10}$$

其中

$$\mathscr{L}_D := \left\{(X,Y) : X \in \mathscr{L}_B, Y \in \mathscr{L}_C, \begin{pmatrix} X & I \\ I & Y \end{pmatrix} \geqslant 0\right\}. \tag{11}$$

证明可联系文献[5]的引理 2、定理 1,3 及 Schur 补准则得到.

### 2.2 等价问题

考虑一般的四块问题[6],这时 $p_1\leqslant m_2, p_2\leqslant m_1$.

设 $q_1=\mathrm{rank}D_{12}, q_1\leqslant m_2$. 存在 $m_2$ 阶非奇异矩阵 $N$,使

$$\begin{pmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} B_{21} & B_{22} & 0 \\ \overline{D}_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

其中 a) $\overline{D}_{12}$ 为 $p_1\times q_1$ 阶矩阵,$\mathrm{rank}\overline{D}_{12}=q_1$; b) $B_{22}$ 为 $n\times q_2$ 阶矩阵,$\mathrm{rank}B_{22}=q_2$; c) $q_1+q_2+q_3=m_2$.

假设 A2: $0<q_2<n, q_1<m_2$. 平凡情形($q_2=n, q_1<m_2$)将在最后提及. 相应地记 $v:=N^{-1}\boldsymbol{u}$

$=(\boldsymbol{v}_1^T \quad \boldsymbol{v}_2^T \quad \boldsymbol{v}_3^T)^T$，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ 分别为 $q_1,q_2,q_3$ 维子向量. 并取 $\hat{B}_{22}$ 使 $T:=(\hat{B}_{22} \quad B_{22})$ 为非奇异阵，则(1)式等价于

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{x}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{12} \end{pmatrix} \boldsymbol{w} + \begin{pmatrix} \bar{B}_{211} & 0 \\ \bar{B}_{221} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{z}_0 = (\bar{C}_{01} \quad \bar{C}_{02}) \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{x}}_2 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{z}_1 = (\bar{C}_{11} \quad \bar{C}_{12}) \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{x}}_2 \end{pmatrix} + (\bar{D}_{12} \quad 0) \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{y} = (\bar{C}_{21} \quad \bar{C}_{22}) \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{x}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{x}}_2 \end{pmatrix} + D_{21}\boldsymbol{w}, \end{cases} \tag{13}$$

其中 $\begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} := T^{-1}AT$，$(\bar{B}_{11} \quad \bar{B}_{12}) := T^{-1}B_1$，$\begin{pmatrix} \bar{B}_{211} & 0 \\ \bar{B}_{221} & I \end{pmatrix} := T^{-1}(B_{21} \quad B_{22})$，$(\bar{C}_{01} \quad \bar{C}_{02}) := C_0T$，$(\bar{C}_{11} \quad \bar{C}_{12}) := C_1T$，$(\bar{C}_{21} \quad \bar{C}_{22}) := C_2T$.

下面将主要探讨(13)式的混合 $H^2/H^\infty$ 问题. 为讨论方便，略去(13)式中各符号的上划线.

**引理 2.** 在假设 A2 下，对(1)式的混合 $H^2/H^\infty$ 问题等价于对(13)式的混合 $H^2/H^\infty$ 问题.

证明. 只证 $N=I$ 的情形，$N$ 为一般非奇异矩阵时只涉及控制器的一一变换.

设存在 $P_0$ 相应于(2)式满足 $R(P_0)<0$，$R(P_0)$ 如(5)式定义，$P_0$ 满足 $\operatorname{tr}(H_0P_0H_0^T)=\inf\{\operatorname{tr}(H_0PH_0^T):=P=P^T>0, R(P)<0\}$.

若令 $\bar{P}_0=\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} P_0 \begin{pmatrix} T^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$，则首先由文献[5]定理 1 可知，$P_0$ 对(1)式与 $\bar{P}_0$ 对(13)式所得的控制器是相同的，设为 $\mathscr{C}$. 记 $\mathscr{C}$ 与(13)式形成的对应于(2)式的闭环系统为(2)′，其系数阵分别为 $F,G,H_0,H_1,J_0,J_1$，通过(3)，(4)两式可以找出它们与 $F,G,H_0,H_1,J_0,J_1$ 的如下关系：

$$F=\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} F \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \bar{H}_0 = H_0\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \bar{H}_1 = H_1\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \bar{G} = \begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} G, \bar{J}_1 = J_1.$$

然后对(5)式左乘 $\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$，右乘 $\begin{pmatrix} T^{-T} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$，可得

$$\overline{FP} + \overline{PF}^T + (\overline{PH}_1^T + \overline{GJ}_1^T) M^{-1} (\bar{H}_1\bar{P} + \bar{J}_1\bar{G}^T) + \overline{GG}^T < 0，且\ \operatorname{tr}(H_0P_0H_0^T) = \operatorname{tr}(\bar{H}_0\bar{P}_0\bar{H}_0^T).$$

反之亦然.　　证毕.

### 2.3　简化的判据

对(13)式，若设 $\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} := \operatorname{Ker}(B_{211}^T \quad D_{12}^T)$，其中 $W_1,W_2$ 分别为 $(n-q_2)\times(n+p_1-q_1-q_2)$，$p_1\times(n+p_1-q_1-q_2)$阶子矩阵. 再将 $X$ 作相应的分块

$$X := \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}.$$

因此，对象(13)式对应的 $\mathscr{L}_B$ 中的不等式可化简为

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_{11}X_{11} + X_{11}A_{11}^T + A_{12}X_{12}^T + X_{12}A_{12}^T + B_{11}B_{11}^T & X_{11}C_{11}^T + X_{12}C_{12}^T \\ C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12}^T & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} < 0. \tag{14}$$

若设 $\mathscr{L}'_B:=\{X:X=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{12}^T & X_{22}\end{pmatrix}\in R^{n\times n},X=X^T>0$,且 $X_{11},X_{12}$满足(14)式$\}$,则可利用引理 1 得到下述定理,这里 $\mathscr{L}_C$ 中的各系数阵由(13)式确定.

**定理 2.**

$$J(T_{zw})=\inf\{\mathrm{tr}(C_0XC_0^T):(X,Y)\in\mathscr{L}'_D\}. \tag{15}$$

其中 $\mathscr{L}'_D:=\left\{(X,Y):X\in\mathscr{L}'_B,Y\in\mathscr{L}_C,\begin{pmatrix}X & I\\ I & Y\end{pmatrix}\geqslant 0\right\}$.

## 3 降阶混合 $H^2/H^\infty$控制器

下面的定理是本文的一个主要结果.

**定理 3.** 对于(13)式下列叙述等价:

(i)它的混合 $H^2/H^\infty$问题可解;

(ii)存在不超过 $n-q_2$ 阶降阶控制器.

证明. (ii)⇒(i)显然,仅证(i)⇒(ii)即可. 只考虑最优混合 $H^2/H^\infty$控制器,次优情形类似可得. 此时存在$(X,Y)\in\mathscr{L}'_D$,且 $v(\mathscr{G})=\inf J(T_{zw})=\mathrm{tr}(C_0XC_0^T)$.

设 $X=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{12}^T & X_{22}\end{pmatrix},Y^{-1}=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12}\\ Y_{12}^T & Y_{22}\end{pmatrix}$, 则 $X-Y^{-1}=\begin{pmatrix}X_{11}-Y_{11} & X_{12}-Y_{12}\\ X_{12}^T-Y_{12}^T & X_{22}-Y_{22}\end{pmatrix}\geqslant 0$.

令 $\overline{X}_{22}:=Y_{22}+(X_{12}^T-Y_{12}^T)(X_{11}-Y_{11})+(X_{12}-Y_{12}),X:=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{12}^T & \overline{X}_{22}\end{pmatrix}$,则不难验证[6,7]rank$(X-Y^{-1})=n-q_2$,且由主子式大于等于零知 $\overline{X}-Y^{-1}\geqslant 0,\overline{X}>0$;又由假设知 $Y\in\mathscr{L}_C$,$X_{11}$和 $X_{12}$满足(14)式,故$(\overline{X},Y)\in\mathscr{L}'_D$;,由文献[5]知对 $\mathscr{G}_0$,相应于$(\overline{X},Y)$的 $H^\infty$控制器 $\mathscr{C}$ 是 $n-q_2$ 阶的.

由 Schur 补准则,有 $X_{22}-Y_{22}\geqslant(X_{12}^T-Y_{12}^T)(X_{11}-Y_{11})+(X_{12}-Y_{12})$,故 $X_{22}-\overline{X}_{22}\geqslant 0$. 因而有 $\overline{X}\leqslant X$. 故有 $\mathrm{tr}(C_0\overline{X}C_0^T)\leqslant\mathrm{tr}(C_0XC_0^T)$. 证毕.

定理 3 不仅揭示了这类混合 $H^2/H^\infty$控制问题降阶控制器的存在性,而且由于证明是构造性的,还可给出设计方法,具体步骤可联系文献[6,7]得到.

考虑 2.2 中提出的平凡情形,此时 $q_1<m_2,q_2=n$,(12)式退化为$\begin{pmatrix}\overline{B}_{21} & \overline{B}_{22} & 0\\ \overline{D}_{12} & 0 & 0\end{pmatrix}$,其中 $B_{22}$为 $n$ 阶非奇异阵,而$\begin{pmatrix}B_2\\ D_{12}\end{pmatrix}^\perp=(0\quad D_{12}^\perp)$,可以验证定理 3 仍成立. 以上的分析显然可推广到对偶情形: $\mathrm{rank}D_{21}=r_2<p_2$,可以得到定理 3 的对偶结论. 注意到 $n-q_2=n-\mathrm{rank}\begin{pmatrix}B_2\\ D_{12}\end{pmatrix}+\mathrm{rank}D_{12}$. 综合各种情况可得下面一般结论.

**定理 4.** 对于(1)式,下列叙述等价:

(i)混合 $H^2/H^\infty$问题可解;

(ii)存在 $n_c$ 阶 $H^\infty$控制器,其中

$$n_c\leqslant\min\left\{n-\mathrm{rank}\begin{pmatrix}B_2\\ D_{12}\end{pmatrix}+\mathrm{rank}D_{12},\quad n-\mathrm{rank}(C_2\quad D_{21})+\mathrm{rank}D_{21}\right\}.$$

## 4 结束语

本文用 LMI 方法研究了连续系统的一类混合 $H^2/H^\infty$ 控制问题的降阶控制器的可解判据和设计准则. 定理 1 将混合 $H^2/H^\infty$ 问题转化到一个涉及 LMI 的优化问题，然后通过把问题转化到一个等价形式，得到了混合 $H^2/H^\infty$ 问题可解的较为简单的判据(定理 2). 在以上结论的基础上，针对奇异对象的 $H^2/H^\infty$ 问题，得到了下述主要结论：若存在混合 $H^2/H^\infty$ 控制器，则必然存在不超过 $n-\mathrm{rank}\begin{bmatrix}B_2\\D_{12}\end{bmatrix}+\mathrm{rank}D_{12}$ 或 $n-\mathrm{rank}(C_2 \quad D_{21})+\mathrm{rank}D_{21}$ 阶的 $H^\infty$ 控制器. 因为定理的证明是构造性的，所以还可以给出基于 LMI 的混合 $H^2/H^\infty$ 降阶控制器的设计方法. 这里由于篇幅所限，未加具体阐述.

与文献[1,2]的结果相比，由于引入 LMI 方法，本文的结果无论在可解判据和设计准则上都较为简单，而且研究的是降阶控制器. 虽然考虑的 $H^2$ 指标较为特殊，但不需对 $\mathscr{G}_0$ 进行其他限制，因而在理论和工程上也具有重要的意义.

虽然本文没有明确混合 $H^2/H^\infty$ 的最优与次优控制问题，但其结论和方法对二者都是适用的，显然可用于 $H^\infty$ 问题，得到降阶 $H^\infty$ 控制器.

## 参 考 文 献


1 Khargonekar P P, Rotea M A. Mixed $H^2/H^\infty$ control: A convex optimization approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1991, **36**: 824—837

2 Bernstein D S, Haddad W M. LQG control with and $H^\infty$ performance bound: A riccati equation approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, **34**: 293—305

3 Doyle J *et al*. Mixed $H^2$ and $H^\infty$ performance objectives Ⅱ: optimal control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**(8): 1575—1587

4 Kaminer I, Khargonekar P P, Rotea M A. Mixed $H^2/H^\infty$ control for discrete-time systems via convex optimization. In: Proc. of ACC, 1992, 1363—1368

5 Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general $H^\infty$ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 1994, **30**: 1307—1317

6 Xin X, Guo L, Feng C B. Reduced-order controllers design for continuous and discrete time singular $H^\infty$ control problems based on LMI. *Automatica*, 1996, **32**: 1601—1609

7 Boyd S *et al*. Linear matrix inequalities in system and control theory: SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia, 1994, **15**: 7—27

# THE LMI BASED REDUCED-ORDER CONTROLLERS FOR MIXED $H^2/H^\infty$ CONTROL PROBLEMS: CONTINUOUS-TIME CASE

GUO LEI XIN XIN FENG CHUNBO

*(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing* 210018)

**Abstract** This paper considers reduced-order controllers for a class of mixed $H^2/H^\infty$ control problems in continuous systems. For singular plants with infinite zeros, we obtain the following important result via the method of linear matrix ineuquality: If the mixed $H^2/H^\infty$ problem is solvable, then there must exist reduced order controllers. We can also give feasible design methods for constructing the reduced-order controller because of the constructive proof, which only involve simple system transformations and convex optimization of LMI.

**Key words** Continuous system, $H^\infty$ control, mixed $H^2/H^\infty$ control, matrix inequality, reduced-order controller.

**郭 雷，忻 欣，冯纯伯** 简介见本刊第23卷第5期.