第 24 卷 第 3 期
1998 年 5 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 3
May., 1998

鲁棒镇定区间系统族的一个充分条件[1)]

王恩平
（中国科学院系统科学研究所 北京 100080）

摘 要 讨论了区间系统族的鲁棒镇定问题，给出存在控制器鲁棒镇定区间系统族的一个充分条件，并且当这个条件成立时，得到了鲁棒镇定区间系统族的控制器的参数化公式.

关键词 区间系统族，鲁棒镇定，鲁棒控制器.

1 引言

对于区间系统族的鲁棒镇定问题已有许多文章进行过讨论[1−4]，它们的一个共同特点是都将区间系统族的鲁棒镇定问题归结为有限个 Kharitonov 系统的同时镇定问题，但后者是一个不易解决的问题，尚无有效设计控制器的方法. 本文将区间系统族视为一个带有互质因子摄动模式的不确定性系统，借助于 Glover 和 McFarlane[5,6]或者 Habets[7]所提供的方法，给出存在控制器鲁棒镇定区间系统族的一个充分条件，并且当这个条件成立时，提供了一种设计鲁棒镇定区间系统族的控制器的方法.

给定一个区间系统族

$$\mathscr{G} = \left\{ G(s,\alpha,\beta) : G(s,\alpha,\beta) = \frac{f(s,\alpha)}{g(s,\beta)} \right\},$$

其中 $f(s,\alpha)=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i s^i$, $g(s,\beta)=\sum_{i=0}^{n}\beta_i s^i$, $n\geqslant m$, $\alpha=[\alpha_0 \quad \alpha_1\cdots\alpha_m]^{\mathrm{T}}\in\Omega_1$, $\beta=[\beta_0 \quad \beta_1\cdots\beta_n]^{\mathrm{T}}\in\Omega_2$, $\Omega_1=\{\alpha:\alpha_i^-\leqslant\alpha_i\leqslant\alpha_i^+, i=0,1,\cdots,m\}$, $\Omega_2=\{\beta:\beta_j^-\leqslant\beta_j\leqslant\beta_j^+, j=0,1,\cdots,n,\quad 0\notin[\beta_n^-,\beta_n^+]\}$，T 表示矩阵或矢量的转置. 令

$$f_i(s)=f(s,\alpha^i)(i=1,2,3,4),\quad g_j(s)=g(s,\beta^j)(j=1,2,3,4)$$

分别为区间多项式 $f(s,\alpha)$和 $g(s,\beta)$的 Kharitonov 多项式，其中

$$\alpha^1=[\alpha_0^- \quad \alpha_1^- \quad \alpha_2^+ \quad \alpha_3^+ \quad \alpha_4^- \quad \alpha_5^-\cdots]^{\mathrm{T}},\quad \alpha^2=[\alpha_0^- \quad \alpha_1^+ \quad \alpha_2^+ \quad \alpha_3^- \quad \alpha_4^- \quad \alpha_5^+\cdots]^{\mathrm{T}},$$

$$\alpha^3=[\alpha_0^+ \quad \alpha_1^+ \quad \alpha_2^- \quad \alpha_3^- \quad \alpha_4^+ \quad \alpha_5^+\cdots]^{\mathrm{T}},\quad \alpha^4=[\alpha_0^+ \quad \alpha_1^- \quad \alpha_2^- \quad \alpha_3^+ \quad \alpha_4^+ \quad \alpha_5^-\cdots]^{\mathrm{T}},$$

$$\beta^1=[\beta_0^- \quad \beta_1^- \quad \beta_2^+ \quad \beta_3^+ \quad \beta_4^- \quad \beta_5^-\cdots]^{\mathrm{T}},\quad \beta^2=[\beta_0^- \quad \beta_1^+ \quad \beta_2^+ \quad \beta_3^- \quad \beta_4^- \quad \beta_5^+\cdots]^{\mathrm{T}},$$

$$\beta^3=[\beta_0^+ \quad \beta_1^+ \quad \beta_2^- \quad \beta_3^- \quad \beta_4^+ \quad \beta_5^+\cdots]^{\mathrm{T}},\quad \beta^4=[\beta_0^+ \quad \beta_1^- \quad \beta_2^- \quad \beta_3^+ \quad \beta_4^+ \quad \beta_5^-\cdots]^{\mathrm{T}}.$$

我们的问题是寻找存在控制器 $k(s)$鲁棒镇定区间系统族 $\mathscr{G}$ 的条件，以及这样的控制器的设计方法和参数化公式.

假若给定一个开环系统 $G(s)$和一个控制器 $K(s)$，并把由它们组成的闭环系统记做(G,K). 又令 RH_∞表示在复平面的右半闭平面内解析的真有理函数矩阵的集合.

1)国家自然科学基金资助课题.
收稿日期 1996-11-04

定义 1. 如果 $\det(I-GK)\neq 0$,称闭环系统 (G,K) 是适定的;如果 $S,KS,SG,I-KSG\in RH_\infty$,称 (G,K) 是内部稳定的,其中 $S=(I-GK)^{-1}$.

定义 2. 已知开环系统 $G(s)$,如果 (G,K) 是适定的和内部稳定的,称控制器 $K(s)$ 镇定 $G(s)$.

定义 3. 已知区间系统族 $\mathscr{G}$,如果 $k(s)$ 镇定区间系统族 $\mathscr{G}$ 中的每一个系统,称控制器 $k(s)$ 鲁棒镇定 $\mathscr{G}$.

2 区间系统族的鲁棒镇定

为了研究区间系统族 $\mathscr{G}$ 的鲁棒镇定问题,首先把它化成一个带有互质因子摄动模式的不确定性系统. 为此,取标称系统

$$G_0(s)=\frac{f(s,\alpha^0)}{g(s,\beta^0)}\in\mathscr{G},$$

其中 $\alpha^0\in\Omega_1,\beta^0\in\Omega_2$. 假设 $f(s,\alpha^0)$ 与 $g(s,\beta^0)$ 在虚轴上没有公共零点,因此由谱分解定理可知,必存在 n 次 Hurwitz 多项式 $h(s)$,使得

$$f(-s,\alpha^0)f(s,\alpha^0)+g(-s,\beta^0)g(s,\beta^0)=h(-s)h(s). \tag{1}$$

于是,若令 $n_0(s)=f(s,\alpha^0)/h(s),m_0(s)=g(s,\beta^0)/h(s)$,则有

$$G_0(s)=n_0(s)m_0^{-1}(s), \tag{2}$$

它是 $G_0(s)$ 在 RH_∞ 上的一个正规互质分解[5-7],即 $n_0(s)$ 与 $m_0(s)$ 是互质的,并且

$$n_0(-s)n_0(s)+m_0(-s)m_0(s)=1. \tag{3}$$

这时,任取 $\alpha\in\Omega_1,\beta\in\Omega_2,G(s,\alpha,\beta)\in\mathscr{G}$,则有

$$G(s,\alpha,\beta)=\frac{n_0(s)+\Delta_n(s,\alpha)}{m_0(s)+\Delta_m(s,\beta)}, \tag{4}$$

其中

$$\Delta_n(s,\alpha)=\frac{f(s,\alpha)-f(s,\alpha^0)}{h(s)},\quad \Delta_m(s,\beta)=\frac{g(s,\beta)-g(s,\beta^0)}{h(s)}. \tag{5),(6}$$

由于 $f(s,\alpha)$ 和 $g(s,\beta)$ 都是区间多项式,因此 $\Delta_n(s,\alpha)$ 和 $\Delta_m(s,\beta)$ 都是区间有理函数族. 又由于 $\Delta_n(s,\alpha)\in RH_\infty$, $\Delta_m(s,\beta)\in RH_\infty$,因此定义

$$\mu(\alpha^0,\beta^0)\triangleq\max_{\alpha\in\Omega_1,\beta\in\Omega_2}\|[\Delta_n(s,\alpha),\Delta_m(s,\beta)]\|_\infty. \tag{7}$$

容易证明

$$\mu(\alpha^0,\beta^0)=\max_{i,j=1,2,3,4}\|[\Delta_n(s,\alpha^i),\Delta_m(s,\beta^j)]\|_\infty. \tag{8}$$

由此可见,只要给定一个标称参数点 (α^0,β^0),便可确定一个标称系统 $G(s,\alpha^0,\beta^0)$,也就能定义一个数 $\mu(\alpha^0,\beta^0)>0$.

现在,任取 $\varepsilon>\mu(\alpha^0,\beta^0)$,构造一个带有互质因式摄动模式的不确定性系统

$$\mathscr{R}_\varepsilon=\left\{p(s):p(s)=\frac{n_0(s)+\Delta_n(s)}{m_0(s)+\Delta_m(s)},\|[\Delta_n(s),\Delta_m(s)]\|_\infty<\varepsilon\right\}.$$

显然,$\mathscr{G}\subset\mathscr{R}_\varepsilon$,并且这种包含关系是严格的. 因此,如果存在控制器 $k(s)$,它能鲁棒镇定 $\mathscr{R}_\varepsilon$,那么它一定能鲁棒镇定区间系统族 $\mathscr{G}$. 于是,我们把寻找鲁棒镇定 $\mathscr{G}$ 的条件转化为研究鲁棒镇定 $\mathscr{R}_\varepsilon$ 的问题,而后者有现成的结果可用. 为此,首先给出标称系统 $G_0(s)$ 的最小状态空间实现

$$G_0(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c & d \end{array}\right].$$

其中 A,b,c,分别为 $n\times n,n\times 1,1\times n$ 阶矩阵;d 为一个标量.于是据文献[7]中的定理4.1.1,$G_0(s)$的正规互质分解可由下式给出

$$\begin{bmatrix} m_0(s) & y(s) \\ n_0(s) & x(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1 - F(sI - A_c)^{-1}b}{\sqrt{1+d^2}} & -\sqrt{1+d^2}F(sI - A_c)^{-1}L \\ \dfrac{C_F(sI - A_c)^{-1}b + d}{\sqrt{1+d^2}} & \sqrt{1+d^2}[1 + C_F(sI - A_c)^{-1}L] \end{bmatrix}. \tag{9}$$

其中

$$A_c = A - bF,\quad C_F = C - dF,\quad F = \frac{1}{1+d^2}(dc + b^TP),\quad L = \frac{1}{1+d^2}(db + Qc^T),$$

$$\left(A - \frac{d}{1+d^2}bc\right)^T P + P\left(A - \frac{d}{1+d^2}bc\right) - \frac{1}{1+d^2}Pbb^TP + \frac{1}{1+d^2}c^Tc = 0, \tag{10}$$

$$\left(A - \frac{d}{1+d^2}bc\right)Q + Q\left(A - \frac{d}{1+d^2}bc\right)^T - \frac{1}{1+d^2}Qc^TcQ + \frac{1}{1+d^2}bb^T = 0, \tag{11}$$

$$-n_0(s)y(s) + m_0(s)x(s) = 1. \tag{12}$$

容易验证

$$h(s) = \begin{cases} \sqrt{\alpha_n^{0^2} + \beta_n^{0^2}}\det(sI - A_c), & 当\ n = m, \\ \beta_n^0\det(sI - A_c), & 当\ n > m. \end{cases}$$

定理 1. 已知不确定性系统 $\mathscr{R}_\varepsilon$. 控制器 $k(s)$鲁棒镇定 $\mathscr{R}_\varepsilon$ 的充分必要条件是

$$k(s) = \frac{y(s) - m_0(s)q(s)}{x(s) - n_0(s)q(s)}, \tag{13}$$

其中 $q(s)\in RH_\infty$是下列次优 Nehari 问题的解

$$\left\| \frac{1}{1+d^2}b^T(sI + A_c^T)^{-1}(I + PQ)c^T - d + q(s) \right\|_\infty \leqslant \sqrt{\varepsilon^{-2} - 1}. \tag{14}$$

这个定理的证明可在文献[5—7]中找到.

定理 2.[7] 已知标称系统 $G_0(s)$,使得用一个控制器鲁棒镇定不确定性系统 $\mathscr{R}_\varepsilon$ 的最大半径 ε 为

$$\varepsilon_{\max} = (1 + \lambda_{\max}(PQ))^{-1/2}. \tag{15}$$

其中 P,Q 分别为 Riccati 方程(10),(11)的唯一正定解;$\lambda_{\max}(\cdot)$表示矩阵的最大特征值.

定理 2 给出的 $\varepsilon_{\max}$是由标称系统 $G_0(s)$唯一决定的.由此可见,当选定标称参数点 α^0,β^0 后,标称系统 $G_0(s)$可决定两个量:一个是由(8)式给出的 $\mu(\alpha^0,\beta^0)$;一个是由(15)式给出的 $\varepsilon_{\max}$.这两个量就给出了鲁棒镇定区间系统族 $\mathscr{G}$ 的一个充分条件.

定理 3. 已知区间系统族 $\mathscr{G}$ 和标称系统 $G_0(s)$. 任取标称参数 α^0,β^0,则存在控制器 $k(s)$ 鲁棒镇定区间系统族 $\mathscr{G}$ 的一个充分条件是

$$\mu(\alpha^0,\beta^0) < \varepsilon_{\max}. \tag{16}$$

证明. 假设(16)式成立.任取 $\varepsilon<\varepsilon_{\max}$,$\mu(\alpha^0,\beta^0)<\varepsilon$. 显然,由 $G_0(s)$和 ε 决定的不确定性系统 $\mathscr{R}_\varepsilon\supset\mathscr{G}$. 由于 $\varepsilon<\varepsilon_{\max}$,因此 Nehari 问题(14)有解 $q(s)\in RH_\infty$. 将这个解代入(13)式决定的控制器 $k(s)$,必鲁棒镇定不确定性系统 $\mathscr{R}_\varepsilon$,从而鲁棒镇定区间系统族 $\mathscr{G}$.

注. 不等式(16)只是一个充分条件而不必要,这是因为能鲁棒镇定区间系统族 $\mathscr{G}$ 的控制器未必能鲁棒镇定不确定性系统 $\mathscr{R}_\varepsilon$.

3 鲁棒控制器的参数化公式

对于给定的区间系统族 $\mathscr{G}$ 和选定的标称系统 $G_0(s)$,假设(16)式成立,于是任取 $\varepsilon,\mu(\alpha^0,\beta^0)<\varepsilon<\varepsilon_{\max}$. 则鲁棒镇定不确定性系统 $\mathscr{R}_\varepsilon$ 的控制器集合由(13)和(14)式决定. 这个控制器集合中的每一个都能鲁棒镇定区间系统族 $\mathscr{G}$. 现在关键的问题是求解 Nehari 问题(14). 为此,令 $\gamma=\sqrt{\varepsilon^{-2}-1}$.

定理 4. 已知区间系统族 $\mathscr{G}$ 的标称系统 $G_0(s)$. 假设(16)式成立,任取 $\varepsilon>0,\mu(\alpha^0,\beta^0)<\varepsilon<\varepsilon_{\max}$,则下式给出的控制器集合能鲁棒镇定区间系统族 $\mathscr{G}$.

$$k(s)=\frac{y(s)-m_0(s)q(s)}{x(s)-n_0(s)q(s)},q(s)=d+\Gamma_U[\Phi],\Phi\in RH_\infty \text{ 且}\|\Phi\|_\infty\leqslant\gamma,$$

$$U=\left[\begin{array}{c:cc} A_c & W_b & -WL_o(I+PQ)c^T \\ \hdashline -\gamma^{-2}b^TL_c & I & 0 \\ -\gamma^{-2}c(I+QP) & 0 & I \end{array}\right],$$

$$A_c^TL_c+L_cA_c+(I+PQ)c^Tc(I+QP)=0,L_oA_c^T+A_cL_o+\frac{1}{(1+d^2)^2}bb^T=0,$$

$$W=(I-\gamma^{-2}L_cL_o)^{-1},\Gamma_U[\Phi]=[U_{11}\Phi+U_{12}][U_{21}\Phi+U_{22}]^{-1}.$$

证明. 利用文献[8]中的定理 2.3,经简单计算可解出(14)式中的 $q(s)$ 为

$$q(s)=d+\Gamma_U[\Phi],\quad \Phi\in RH_\infty \text{ 且}\|\Phi\|_\infty\leqslant\gamma,$$

其中 $\Gamma_U[\Phi]$如定理所述. 将这样的 $q(s)$代入(13)式,由定理 1 便得鲁棒镇定不确定性系统 $\mathscr{R}_\varepsilon$ 的控制器集合. 这个控制器集合也能鲁棒镇定区间系统族 $\mathscr{G}$.

注. 由定理 4 给出的控制器是能鲁棒镇定区间系统族 $\mathscr{G}$ 的,但是能鲁棒镇定区间系统族 $\mathscr{G}$ 的控制器不一定都能表成定理 4 给出的那种形式. 因此说定理 4 给出的控制器集合是能鲁棒镇定区间系统族的控制器集合的一个子集.

参 考 文 献

1 Wang Long, Huang Lin. Vertex results for uncertain systems. *Int. J. Systems Sci.*, 1994, **26**(3): 541－549

2 Chapellat H, Dahleh M, Bhattacharyya S P. Robust stability under structured and unstructured perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1990, **35**(10): 1100－1108

3 Barmish B R, Hollot C V, Kraus F F, Tempo R. Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators. *IEEE Trans. Autom. Contol*, 1992, **37**(6): 707－714

4 耿志勇,王恩平,黄琳. 区间对象族四顶点镇定结果. 94' 中国控制会议论文集,北京:中国科学技术出版社,1994. 231—240

5 Glover K, McFarlane D C. Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with H_∞-bounded uncertainty. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, **34**(8): 821—830

6 McFarlane D C, Glover K. Robust controller design using normalized corprime factor plant descriptions. Lecture notes in control and information sciences, Springer-Verlag, 1989, 138

7 Habets L. Robust stabilization in the gap-topology. Lecture notes in control and information sciences, Springer-Verlag, 1991. 150

8 Green M, Glover K, Limebeer D, Doyle J. A J-Spectral factorization approach to H_∞ control. *SIAM J. Control and Optimization*, 1990, **28**(6): 1350—1371

A SUFFICIENT CONDITION FOR ROBUST STABILIZATION OF INTERVAL PLANTS

WANG ENPING

(*Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract The robust stabilization problem of the interval plants is discussed in this paper. A sufficient condition for the existence of controllers to robustly stabilize interval plants is given and under this condition a parametrization of all controllers is obtained.

Key words Interval plants, robust stabilization, robust controllers.

王恩平 简介见本刊第 21 卷第 6 期.