第 24 卷 第 4 期
1998 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 4
Jul., 1998

短文

有限状态变系数离散系统的稳定性检验[1)]

肖 扬 杜锡钰

(北方交通大学信息科学研究所 北京 100044)

摘 要 提出了系统参数独立于系统节拍变化的有限状态变系数离散系统模型、稳定性检验定理及稳定性检验的快速算法. 这类系统的稳定的充分必要条件是其传递函数的分母多项式为有限 Schur 多项式簇. 提出了改进的变系数 Schur 检验表，使系统的稳定性检验过程简化，计算量大为减少，有限次运算即可完成.

关键词 有限状态变系数离散系统，稳定性检验定理与算法.

1 引言

一大类动态离散系统的系统参数为有限状态变化(m)，并与系统的节拍(n)异步，即 m 与 n 无关，可用差分方程表示为

$$y(n,m)=\sum_{k=0}^{N}a(k,m)x(n-k)-\sum_{k=0}^{N}b(k,m)y(n-k,m). \tag{1}$$

定义有限状态变系数离散系统的目的在于：一是分析系统参数非连续变化的动态离散系统的稳定性，这类系统的参数空间为点状结构，现有的关于系统参数连续变化的动态离散系统的鲁棒稳定性结论一般只能为之提供充分条件，具有相当的保守性；二是为系统参数连续变化的动态离散系统的鲁棒稳定性分析，提供一种数值检验算法；可在其连续的系统参数空间内利用收缩网孔法搜寻不稳定的子空间；三是解决系统参数独立于系统的节拍(n)变化时的动态离散系统的稳定性分析问题，这时系统参数可表示为离散变量 m 的函数. 系统参数之间可以是相关的. 限于篇幅，本文只给出主要结果.

如文献[1,2]等所指出的，Kharitonov 定理仅适用于系统参数为独立的连续系统的鲁棒稳定性检验，对本文定义的这类动态离散系统，并不适用. 不同于定常系数离散系统，式(1)系统的系数与输出为二维离散阵列，该系统的传递函数为

$$H(z,m)=A(z,m)/B(z,m). \tag{2}$$

其中

$$A(z,m)=\sum_{n=0}^{N}a(n,m)z^{-n}, \tag{3a}$$

1)国家自然科学基金资助项目.

收稿日期 1996-03-16

$$B(z,m) = \sum_{n=0}^{N} b(n,m)z^{-n}. \tag{3b}$$

$m=0,1,\cdots,M(M<\infty)$. M 即为变系数离散系统的系数变化的状态数. 式(1)系统实际对应于有限个状态的系统簇. 当状态数 $M\to\infty$ 时,系统系数为连续变化. 系统系数无变化时($m=0$),式(1)的离散系统为定常离散系统

$$H(z,0) = A(z,0)/B(z,0). \tag{4}$$

系统诸系数的变化偏差为 $\Delta a_n = a(n,m) - a(n,0)$, $\Delta b_n = b(n,m) - b(n,0)$.

对式(1)系统簇进行稳定性检验时,需对系统集合中的每一系统元素不同组合进行检验. 此时,若每一变系数有 M 个状态,系统为 N 阶($N+1$ 个变系数),则需检验的系统元素不同组合为 $C_{M(N+1)}^{N+1}$,计算量庞大. 文献[1,3]的检验方法适合系统系数空间为连续的,对式(1)有限系统簇的检验具有相当的保守性,只能提供稳定的充分条件. 而采用下述定理检验式(1)系统的稳定性,可解决这一问题.

定理 1. 有限状态变系数离散系统(1)是 BIBO 稳定的,当且仅当

$$B(z,m) = \sum_{n=0}^{N} b(n,m)z^{-n} \neq 0, |Z| \geq 1, m = 0,1,\cdots,M. \tag{5}$$

证明略.

由于有限状态变系数离散系统的参数状态 m 与系统节拍 n 无关,因此,其稳定性检验实际上是其传递函数的分母多项式的零点检验,即检验 $B(z,m)$ 是否为 Schur 多项式簇. 若离散系统的参数状态 m 与系统节拍 n 有关,如 m 为 n 的线性函数,则系统不能表示为传递函数的形式,而应用状态空间方程表示,系统矩阵的特征多项式无单位圆外的零点不一定能保证其稳定性,这一问题我们将另文论述.

2　有限状态变系数多项式簇零点的列表检验算法

文献[5,6]对 Schur 列表检验法进行了改进,使检验表具有表 1 的形式,减少了检验行数. 计算量小,易于编程实现. 将式(5)和 $b(n,m)$ 视为复多项式 $B(z,m)$ 的变系数,可生成如表 1 所示的检验表.

表 1　有限状态变系数多项式零点检验表

第 i 行	z^0	z^{-1}	Z^{-2}	…	$Z^{-(N-2)}$	$Z^{-(N-1)}$	Z^{-N}
0	$b_{0,0}(m)$	$b_{0,1}(m)$	$b_{0,2}(m)$	…,	$b_{0,N-2}(m)$	$b_{0,N-1}(m)$	$b_{0,N}(m)$
1	$b_{1,0}(m)$	$b_{1,1}(m)$	$b_{1,2}(m)$	…,	$b_{1,N-2}(m)$	$b_{1,N-1}(m)$	
……							
$N-1$	$b_{N-1,0}(m)$	$b_{N-1,1}(m)$					

表中各行系数采用如下算法生成,当 $i=0$ 时,

$$b_{0,n}(m,n) = b(m,n) \tag{6}$$

即表中的第 0 行为待检验多项式的变系数. 当 $i\geqslant 1$ 时,由下式递推出各行中的系数

$$b_{i,k}(m) = \begin{vmatrix} b_{i-1,0}(m) & b_{i-1,N-i+1-k}(m) \\ b_{i-1,N-i+1}(m) & b_{i-1,k}(m) \end{vmatrix}, k = 0,1,\cdots,N-i+1. \tag{7}$$

在该表中，$b_{i,k}(m)$是变系数.

下节将证明多项式簇 $B(z,m)$满足定理 1 的充要条件是，变系数 $b(n,m)$在表 1 中应满足：对于 $m=0,1,\cdots,M$，

$$b_{i,0}(m) \pm b_{i,N-i+1}(m) > 0, i = 0,\cdots,N-1. \tag{8}$$

这里，i 为行号，$b_{i,0}(m)$和 $b_{i,N-i+1}(m)$分别是表中第 i 行的首项和末项.

由式(8)可得一检验函数

$$D_i(i,m) = b_{i,0}(m) \pm b_{i,N-i+1}(m), \quad i = 0,\cdots,N-1. \tag{9}$$

当多项式的系数状态数 M 很大时，传统的一维 Schur 检验需要进行 M 次列表，当 M 趋于无穷时，即系数为连续平滑变化时，则需要进行无穷次列表，显然这是不可能的. 为解决这一问题，我们定义检验函数 $D_i(i,m)$后，可暂不考虑状态数，而以各变系数为初始函数直接列表，得到唯一的检验函数 $D_i(i,m)$. 该检验函数是多项式的变系数的多重复合函数. 当状态 m 变化时，不必反复调用检验表，只需判断检验函数是否恒大于零. 这样，只需一次列表，即可得到所需的检验函数，从而使检验过程简化，计算量大为减少. 对式(7)编程，可求得如表 1 的变系数检验表. 检验 $D_i(i,m)$是否是式(8)的条件，即可判定多项式簇是否有单位圆外零点.

3 有限状态变系数离散系统稳定性检验定理

为了检验条件式(8)，我们将提供一等效条件.

定理 2. 变系数多项式

$$B(z,m) = \sum_{n=0}^{N} b(n,m)z^{-n} \neq 0, |Z| \geq 1, m = 0,1,\cdots,M. \tag{10}$$

当且仅当 $B(z,m)$满足下列条件：

a) $$B(1,m)>0, \tag{11a}$$

b) 下列 $N\times N$ 变系数矩阵为正定.

$$\Delta_N^{\pm}(m) = \begin{bmatrix} b(0,m) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b(1,m) & b(0,m) & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ B(N-1,m) & \cdots & b(1,m) & & b(0,m) \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b(N,m) \\ 0 & 0 & \cdots & b(N,m) & b(N-1,m) \\ & & & \cdots\cdots & \\ b(N,m) & b(N-1,m) & \cdots & & b(1,m) \end{bmatrix}. \tag{11b}$$

证明. 由文献[4]的第 5.3 节，作简单的代换：$b_n=b(n,m), n=1,\cdots,N$，即得上述结果.

事实上，定理 2 的检验已被变为 Schur 检验. 下列定理说明其检验过程.

定理3. 当且仅当有限状态变系数多项式(5)满足条件：

a) $$B(1,m)>0, \quad m=0,1,\cdots,M, \tag{12a}$$

b) $$D_{\pm}(i,m)>0, \quad i=0,\cdots,N-1, \tag{12b}$$

$m=0,1\cdots,M$,则该多项式无单位圆外零点,这里,$D_{\pm}(i,m)$由式(9)定义.

证明. 由文献[4]的第 5.3 节知,Schur 表与定理 2 的系数矩阵式(11b)相对应,当矩阵式(11b)为正定时,表 1 各行系数满足式(12b),而式(12a)与式(11a)一致. 由定理 2 可得多项式 $B(z,m)$无单位圆外零点. 证毕

定理 2 和 3 均可用来确定有限 Schur 多项式簇,其不同点在于:定理 2 需对多项式系数的每一次变化,反复检验变参数矩阵(11b)的正定性,其计算量庞大,并且需要知道多项式系数的确切值,因而对不确定多项式簇,将无法分析;定理 3 则可利用 Schur 检验表,生成检验函数 $D_i(i,m)$. 由于该检验函数是多项式变系数的多重复合函数,可在不知道多项式系数的确切值的情况下生成,因此,定理 3 可对不确定多项式簇的有限状态进行 Schur 稳定性检验. 然而,对于多项式系数连续变化的不确定多项式簇,状态数 m 将趋于无穷,检验函数 $D_i(i,m)$将变为连续函数,当 m 为有限值时,定理 3 对多项式系数连续变化的不确定多项式簇只能提供 Schur 稳定性的必要条件. 定理 3 可在不确定多项式簇的系数空间内确定有限 Schur 多项式簇的子空间. 此外,定理 2 和 3 对多项式的变系数之间是否独立并未限制,因此,允许多项式的变系数之间存在线性或非线性关系.

4 应用举例与结论

限于篇幅,仅讨论定理 3 在区间多项式方面的应用. 区间多项式系统具有类似式(1)系统的形式,不同点在于:区间多项式系统只给出系数的上下界,系数在其上下界内的变化不确定;但利用式(1)系统可将其系数空间离散化,进行数值逼近的稳定性分析. 另一方面,可求得满足式(1)系统需要的稳定子空间点集. 所以,可利用定理 3 验证文[2]中的区间多项式鲁棒稳定性的边界检验反例,并确定有限状态离散多项式的稳定子空间点集. 这里给出的例 1 满足离散情况下 Kharitonov 集合形式的端点稳定条件,然而却不是 Schur 多项式簇.

例 1. 判断下列 3 阶多项式簇是否为 Schur 多项式簇[2],确定有限状态离散多项式的稳定子空间,

$$B(z,b)=1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+b_3z^{-3}.$$

1)系数空间:$b_1\in[-0.5,0.25]$,$b_2\in[-0.5,0.5]$,$b_3\in[-0.5,0.25]$.

2)系数子空间:$b_1\in[-0.333,0.25]$,$b_2\in[-0.333,0.5]$,$b_3\in[-0.333,0.25]$.

解. 1)将系数空间按 0.25 的步长离散化,系数集合为 $b_1\in\{-0.5,-0.25,0.025\}$,$b_2\in\{-0.5,-0.25,0.025,0.5\}$,$b_3\in\{-0.5,-0.25,0.025\}$.

利用表 1 构成检验函数 $D(i,m)$,检验是否满足定理 3 的条件,结果在 $b_1=b_2=b_3=-0.5$ 处,不满足式(12). 根据定理 3,$B_1(z,m)$存在单位圆外零点. 因此,$B(z,b)$不是 Schur 多项式簇.

2) 将系数空间按 0.001 的小步长离散化,代入表 1 检验,均满足定理 3 的条件,根据定理 3,有限多项式簇 $B_2(z,m)$在该离散系数空间无单位圆外零点,为有限 Schur 多项式簇.

如上所述,定理 3 是区间多项式的 Schur 稳定性的必要条件,而非充分条件,这是由于区间多项式的系数空间是连续的,定理 3 所要求的系统的系数空间是离散的. 对于有限

状态变系数离散系统，定理 3 是其稳定的充分必要条件.

参 考 文 献

1 肖扬. 动态递归数字滤波器的鲁棒稳定性检验. 北方交通大学学报，1995，**19**(3)：277—281

2 Joanna Cieslik. On Possibilities of the Extension of Kharitonov Stability Test for Internal Polynomials to the Discrete Case. *IEEE Trans. Automatic Control*，1987，**32**(3)：237—238

3 Ackermann J E and Barmish B R. Robust Schur Stability of a Polytope of Polynomials. *IEEE Trans. Automatic Control*，1988，**33**(10)：984—986

4 LaSalle J P. The Stability and Control of Discrete Processes. New York：Springer-Verlag，inc. 1986，Chapter 5

5 肖扬. 二维离散赫维茨多项式的复系数列表检验法. 电子科学学刊，1995，**17**(6)：81—85

6 杜锡钰，肖扬等著. 多维数字滤波器. 北京：国防工业出版社，1995

STABILITY TEST FOR FINITE STATE VARIANT COEFFICIENTS' DISCRETE SYSTEMS

XIAO YANG DU XIYU

(*Institute of Information Science*，*Northern Jiaotong University*，*Beijing* 100044)

Abstract The paper proposes the model，stability test theorems and their fast algorithm for the discrete systems with finite state variant coefficients which vary independently with the system's clock. The necessary and sufficient condition for stability of this kind of systems is that the denominator polynomials of their transfer functions are finite Schur polynomial family. The stability test procedure has been simplified by improved Schur test table with variant coefficients，and the computation amount has been reduced and can be completed by finite computations

Key words Finite state variant coefficients' discrete systems，stability test theorems and algorithm.