第 24 卷 第 4 期
1998 年 7 月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 24, No. 4
Jul., 1998

短文

不确定性时滞系统基于观测器的鲁棒镇定

张明君 程储旺 孙优贤
(浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027)

摘 要 研究一类不确定性时滞系统的鲁棒镇定问题.当系统既有状态时滞又有控制输入时滞,而且系统的状态和控制输入均含有不确定性时,假设不确定性满足具有一定物理意义的匹配条件,得到了系统可由基于观测器的状态反馈鲁棒镇定的充分条件,并给出了观测器和反馈控制器的设计步骤.该方法仅需求解两个黎卡提不等式.

关键词 时变时滞,不确定性系统,观测器,鲁棒控制.

1 引言

利用状态反馈镇定不确定性系统已经取得了许多有价值的研究成果,但对于大多数实际系统,状态一般不可以直接测得,通常需采用观测器来获得状态信息,所以一些学者对不确定性系统基于观测器的反馈控制作过许多研究[1-3].文[1]主要研究一般不确定性系统的观测器构造问题;文[2]采用 Riccati 方程研究非匹配不确定性系统的鲁棒控制问题,但均没有得到理想的结论;文[3]仅对满足匹配条件具有状态不确定性的一类线性系统,给出了通过求解两个 Riccati 方程的状态观测器和鲁棒控制器的设计方法,对生产实践中经常遇到的状态和控制输入均含有不确定性的时滞系统却未作讨论.本文对状态和控制输入均含有不确定性且满足匹配条件的一类时滞系统,给出了通过求解两个 Riccati 不等式的状态观测器和鲁棒控制器的设计方法.

2 主要结果

讨论不确定性时滞系统

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= (A + \Delta A(\boldsymbol{r}(t)))\boldsymbol{x}(t) + (A_d + \Delta A_d(\boldsymbol{s}(t)))\boldsymbol{x}(t - x) + \\ &\quad (B + \Delta B(\boldsymbol{q}(t)))\boldsymbol{u}(t) + (B_d + \Delta B_d(\boldsymbol{v}(t)))\boldsymbol{u}(t - \tau), \\ \boldsymbol{y}(t) &= C\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad \forall t \in [-\tau, 0].\end{aligned} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x}\in R^M$ 是状态向量,$\boldsymbol{u}\in R^{M'}$ 是控制向量,$\boldsymbol{y}\in R^r$ 是测量输出;A, A_d, B, B_d 和 C 表示合适维数的矩阵,$\tau>0$ 是滞后时间,$\varphi(t)$ 是一个连续的矢量初值函数,$\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{s}(t), \boldsymbol{q}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 是不确定性参数向量.本文对系统(1)作如下假设.

收稿日期 1996-07-16

假设 1. 对所有 $t \geqslant 0, \boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{s}(t), \boldsymbol{q}(t)$ 和 $\boldsymbol{v}(t)$ 是 Lebesque 可测的矢量函数,且

$$\Theta = \{\boldsymbol{r}(t) \in R^k : |r_i(t)| \leqslant \bar{r}, i = 1,2,\cdots,k; \quad \bar{r} \geqslant 0\};$$
$$\Omega = \{\boldsymbol{s}(t) \in R^l : |s_i(t)| \leqslant \bar{s}, i = 1,2,\cdots,l; \quad \bar{s} \geqslant 0\};$$
$$\Psi = \{\boldsymbol{q}(t) \in R^m : |q_i(t)| \leqslant \bar{q}, i = 1,2,\cdots,m; \quad \bar{q} \geqslant 0\};$$
$$E = \{\boldsymbol{v}(t) \in R^n : |v_i(t)| \leqslant \bar{v}, i = 1,2,\cdots,n; \quad \bar{v} \geqslant 0\}. \tag{2}$$

假设 2. 不确定性矩阵 $\Delta A(\cdot), \Delta A_d(\cdot), \Delta B(\cdot), \Delta B_d(\cdot)$ 满足

$$\Delta A(\boldsymbol{r}(t)) = B(\sum_{i=1}^{k} A_i r_i(t)); \qquad \Delta A_d(\boldsymbol{s}(t)) = B(\sum_{i=1}^{l} A_{di} s_i(t));$$
$$\Delta B(\boldsymbol{q}(t)) = B(\sum_{i=1}^{m} B_i q_i(t)); \qquad \Delta B_d(\boldsymbol{v}(t)) = B(\sum_{i=1}^{n} B_{di} v_i(t)). \tag{3}$$

其中 $A_i = d_i e_i^{\mathrm{T}}; A_{di} = f_i g_i^{\mathrm{T}}; B_i = h_i w_i^{\mathrm{T}}; B_{di} = j_i k_i^{\mathrm{T}}; e_i, g_i$ 为 M 维列向量,d_i、f_i、h_i、w_i、j_i、k_i、均为 M' 维列向量. 一般来说,若 $\Delta A(\cdot), \Delta A_d(\cdot), \Delta B(\cdot), \Delta B_d(\cdot)$ 满足匹配条件,则它们均可以通过"秩-1"分解得到这种需要的形式[4].

假设 3. (A,B) 能控,(C,A) 能观. $A_d = BH, B_d = BN$.

为了推导方便,令

$$T \triangleq \bar{r}\sum_{i=1}^{k} d_i d_i^{\mathrm{T}}; \quad U \triangleq \bar{r}\sum_{i=1}^{k} e_i e_i^{\mathrm{T}}; \quad S \triangleq \bar{s}\sum_{i=1}^{l} g_i g_i^{\mathrm{T}};$$
$$W \triangleq \bar{q}\sum_{i=1}^{l} f_i f_i^{\mathrm{T}}; \quad V \triangleq \bar{q}\sum_{i=1}^{m} h_i h_i^{\mathrm{T}}; \quad Q \triangleq \bar{s}\sum_{i=1}^{m} w_i w_i^{\mathrm{T}};$$
$$R \triangleq \bar{v}\sum_{i=1}^{n} j_i j_i^{\mathrm{T}}; \quad Z \triangleq \bar{s}^2 \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} |g_i^{\mathrm{T}} g_i| f_j f_j^{\mathrm{T}};$$
$$P \triangleq \bar{v}\sum_{i=1}^{n} k_i k_i^{\mathrm{T}}; \quad G \triangleq \bar{v}^2 \sum_{i1=1}^{n}\sum_{i2=1}^{n} |k_{i1}^{\mathrm{T}} k_{i1}| j_{i2} j_{i2}^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

我们知道,对于满足形式(1)的系统,当状态不可以直接获得时,一般需构造如式(5)形式的状态观测器来估计状态,然后组成如式(6)所示的反馈控制律对系统进行控制.

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = A\boldsymbol{z}(t) + B\boldsymbol{u}(t) + r_0 P_0^{-1} C^{\mathrm{T}}(y - C\boldsymbol{z}(t)), \tag{5}$$
$$\boldsymbol{u}(t) = -r_c B^{\mathrm{T}} P_c \boldsymbol{z}(t). \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{z}(t) \in R^M$ 是观测器状态,P_c 和 P_0 及常数 r_c 和 r_0 待定. 一般称 $L = r_0 P_0^{-1} C^{\mathrm{T}}$ 为观测器增益,$K = -r_C B^{\mathrm{T}} P_c$ 为控制器增益.

定理 1. 对满足假设 1—3 的系统(1),如果存在对称正定矩阵 P_c 和 P_o 及正常数 r_c 和 r_o 使式(7)中的 $\tilde{Q}$ 负定,则由(5),(6)给出的控制律鲁棒镇定系统(1).

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & r_c P_c B B^{\mathrm{T}} P_c \\ r_c P_c B B^{\mathrm{T}} P_c & Q_{22} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

其中

$$Q_{11} = A^{\mathrm{T}} P_o + P_o A - 2r_o C^{\mathrm{T}} C + 2r_c P_c B Q B^{\mathrm{T}} P_c + 2r_c P_c B B^{\mathrm{T}} P_c + P_o B[T + HH^{\mathrm{T}} + HSH^{\mathrm{T}} + W + Z + 2r_c V + (r_c + r_c^2)(NN^{\mathrm{T}} + NPN^{\mathrm{T}} + R + G)]B^{\mathrm{T}} P_o, \tag{8}$$

$$Q_{22} = A^{\mathrm{T}} P_o + P_c A + 2U + 2I - r_c P_c P[I - r_c^{-1}(I + T + HH^{\mathrm{T}} + HSH^{\mathrm{T}} + W + Z) - 2(Q + V + NN^{\mathrm{T}} + NPN^{\mathrm{T}} + R + G]B^{\mathrm{T}} P_c. \tag{9}$$

证明. 令 $\boldsymbol{e}(t)\triangleq\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{z}(t)$，由(1)，(5)，(6)式可得

$$\boldsymbol{e}(t)=(A-r_oP_c^{-1}C^{\mathrm{T}}C)\boldsymbol{e}(t)+\Delta A(\boldsymbol{r}(t))\boldsymbol{x}(t)+(A_d+\Delta A_d(\boldsymbol{s}(t)))\boldsymbol{x}(t-\tau)+\Delta B(q(t))\boldsymbol{u}(t)+(B_d+\Delta B_d(\boldsymbol{v}(t)))\boldsymbol{u}(t-\tau). \tag{10}$$

由(6)式，将(1)，(10)式合成增广系统为

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{e}}(t)\end{bmatrix}=\left[\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta A(\boldsymbol{r}(t)) & 0\\ \Delta A(\boldsymbol{r}(t)) & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{e}(t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}r_c(B+\Delta B(\boldsymbol{q}(t)))B^{\mathrm{T}}P_c & -r_c(B+\Delta B(\boldsymbol{q}(t)))B^{\mathrm{T}}P_c\\ 0 & r_0P_o^{-1}C^{\mathrm{T}}C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{e}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ -r_c\Delta B(\boldsymbol{q}(t))B^{\mathrm{T}}P_c & r_c\Delta B(\boldsymbol{q}(t))B^{\mathrm{T}}P_c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{e}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A_d+\Delta A_d(\boldsymbol{s}(t)) & 0\\ A_d+\Delta A_d(\boldsymbol{s}(t)) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t-\tau)\\ \boldsymbol{e}(t-\tau)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-r_c(B_d+\Delta B_d(\boldsymbol{v}(t)))B^{\mathrm{T}}P_c & r_c(B_d+\Delta B_d(\boldsymbol{v}(t)))B^{\mathrm{T}}P_c\\ -r_c(B_d+\Delta B_d(\boldsymbol{v}(t)))B^{\mathrm{T}}P_c & r_c(B_d+\Delta B_d(\boldsymbol{v}(t)))B^{\mathrm{T}}P_c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t-\tau)\\ \boldsymbol{e}(t-\tau)\end{pmatrix}. \tag{11}$$

对该系统构造 Lyapunov 函数如

$$V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{e}(t))=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)]\begin{bmatrix}P_c & 0\\ 0 & P_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{e}(t)\end{bmatrix}+\int_{t-\tau}^{t}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\quad \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(s)]\begin{bmatrix}R_1 & 0\\ 0 & R_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(s)\\ \boldsymbol{e}(s)\end{bmatrix}\mathrm{d}s. \tag{12}$$

对其求时间的导数，有

$$\dot V(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{e}(t))=[\dot{\boldsymbol{x}}(t)\quad \dot{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(t)]\begin{pmatrix}P_c & 0\\ 0 & P_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{e}(t)\end{pmatrix}+[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)]\begin{bmatrix}P_c & 0\\ 0 & P_0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{e}}(t)\end{pmatrix}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)R_1\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)R_1\boldsymbol{x}(t-\tau)+e^{\mathrm{T}}(t)R_2e(t)-e^{\mathrm{T}}(t-\tau)R_2e(t-\tau). \tag{13}$$

运用两个不等式

$$XY^{\mathrm{T}}+YX^{\mathrm{T}}\leqslant\alpha_1XX^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\alpha_1}YY^{\mathrm{T}},\quad 2X^{\mathrm{T}}Y\leqslant\alpha_2X^{\mathrm{T}}+\frac{1}{\alpha_2}Y^{\mathrm{T}}Y. \tag{14}$$

其中 α_1,α_2 为正常数，X 和 Y 为适当维数的矩阵或列向量. 可得

$$\begin{aligned}\dot V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{e}(t))\leqslant{}& X^{\mathrm{T}}(t)\{A^{\mathrm{T}}P_c+P_cA+2U+R_1-r_cP_cB[2I-r_c^{-1}(T+HH^{\mathrm{T}}+\\ &HSH^{\mathrm{T}}+W+Z)-2(Q+V+NN^{\mathrm{T}}+NPN^{\mathrm{T}}+\\ &R+G)]B^{\mathrm{T}}P_c\}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)\{A^{\mathrm{T}}P_o+P_oA-2r_oC^{\mathrm{T}}C+\\ &2r_cP_cBQB^{\mathrm{T}}P_c+R_2+P_0B[T+HH^{\mathrm{T}}+HSH^{\mathrm{T}}+W+Z+\\ &2r_cV+r_c(1+r_c)(NN^{\mathrm{T}}+NPN^{\mathrm{T}}+R+G)]P^{\mathrm{T}}P_0\}\boldsymbol{e}(t)+\\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)[(1+r_c)P_cBB^{\mathrm{T}}P_c+2I-R_1]x(x-\tau)+\\ &\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t-\tau)(2r_cP_cBB^{\mathrm{T}}P_c-R_2)\boldsymbol{e}(t-\tau)+\\ &r_c\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P_cBB^{\mathrm{T}}P_c e(t)+r_ce^{\mathrm{T}}(t)P_cBB^{\mathrm{T}}P_c\boldsymbol{x}(t).\end{aligned} \tag{15}$$

令 $R_1=(1+r_c)P_cBB^TP_c+2I,\quad R_2=2r_cP_cBB^TP_c,$　　(16)

则(15)可表示为

$$\dot V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{e}(t))\leqslant[\boldsymbol{e}^T(t)\quad \boldsymbol{x}^T(t)]\tilde{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}(t)\\ \boldsymbol{x}(t)\end{bmatrix}. \tag{17}$$

可见当 $\tilde{Q}<0$ 时,有 $\dot V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{e}(t))<0$,由 Lyapunov 稳定性定理,可得定理 1. 证毕.

求解步骤:

由 Schur 补定理[5]知,$\tilde{Q}<0$ 等价于以下两个不等式

$$Q_{22}<0,\quad Q_{11}-r_c^2P_cBB^TP_cQ_{22}^{-1}P_CBB^TP_C<0. \qquad (18),(19)$$

第 1 步. 选择 r_c 解不等式(18)得对称正定解 P_c;

第 2 步. 将 r_c,P_c 代入式(19);

第 3 步. 选 r_0,求解式(19),如有对称正定解 P_o,则由定理 1 得基于观测器的反馈镇定控制律,否则继续调整 r_o,直到方程(19)有解. 或者,返回步骤 1 重复上述设计过程.

本文给出了一种通过求解两个 Riccati 不等式的鲁棒镇定方法,该方法适用于状态和控制输入均含有不确定性且满足匹配条件的时滞系统. 由于控制器的实现简单,对于工业生产中广泛存在的不确定性动态时滞过程具有重要的实际意义.

参 考 文 献

1 Stefani R T. Reducing the sensitivity to parameter variations of a minimun order reduced—order observer. *Int. J. Contr.*, 1982,**35**(6):983—995

2 Petersen I R. A Riccati equation approach to the design of stabilizing controllers and observers for a class of uncertain linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1985,**30**(9):904—1907

3 Jabbari F et al. Robust Linear Controller Using Observers. *IEEE Automat. Contr.*,1991,**36**(12):1509—1514

4 Petersen I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Syst. Contr. Lett.*,1987(8):351—357

5 Boyd Stephen et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM,1994

OBSERVER-BASED ROBUST STABILIZATION FOR UNCERTAIN DELAYED SYSTEMS

ZHANG MINGJUN　CHENG CHUWANG　SUN YOUXIAN

(*Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract The problem of robust stabilization for a class of uncertain delayed systems is addressed. The considered system has uncertainties and delays in both state and control input. The uncertainties are assumed to satisfy the matching condition in some physical sense. A sufficient condition is obtained that the uncertain delayed system is robust stabilizable via observer-based state feedback controllers. And the main steps of designing the observer and feeback controller are presented. One only need to solve two Riccati inequalities when using the proposed method.

Key words time-varying delay, uncertain system, observer, robust control.