

鲁里叶系统鲁棒输入输出稳定性 的 H_∞ 范数摄动界¹⁾

陈 辉 黄 琳

(邮电部规划研究院 北京 100037) (北京大学力学系 北京 100871)

摘 要 讨论了一般鲁里叶系统的鲁棒输入、输出稳定性问题。利用 H_∞ 范数与互质因子摄动两种度量方法给出了鲁里叶系统在线性部分与非线性部分同时有摄动时,系统仍能保持输入、输出稳定性的摄动量上界估计式,并用两个例子说明了该摄动界的有效性。

关键词 鲁里叶系统,鲁棒输入、输出稳定性,摄动界。

1 引 言

输入、输出稳定性(以后简记为 IO 稳定性)是继李雅普诺夫意义下的稳定性之后自动控制系统稳定性理论的新发展,并随着控制理论其它分枝的发展,得到了越来越多的应用,例如 IO 稳定性理论已经成为大系统理论中稳定性分析的重要工具^[1]。但是到目前为止,关于系统 IO 稳定性的结果大都局限于确定性系统,而关于鲁棒 IO 稳定性的工作尚不多,这与过去系统鲁棒性问题自身的研究进展不大有关。进入 80 年代,系统鲁棒分析与控制问题取得了重要突破^[2-4],这也使得系统鲁棒 IO 稳定性问题得到了重视。文献[1]中曾对鲁棒 IO 稳定性问题进行了讨论,基于 IO 稳定性理论中著名的小增益定理引入了增益裕度 δ 的概念,书中认为 δ 正是系统 IO 稳定性鲁棒性的一种定量表示,并指出增益裕度概念尚未同系统的品质建立一定的联系。

基于现代鲁棒控制中的 H_∞ 理论,本文对具有广泛代表意义的一类非线性系统——鲁里叶系统的鲁棒 IO 稳定性问题进行了研究,文中利用加性和互质因子型摄动两种方法来度量系统的摄动,给出了当系统线性与非线性部分同时有摄动时,仍能保持 IO 稳定的充分条件,同时将文献[1]中增益裕度概念与系统本身的品质建立了联系,并用算例说明了文中结果的有效性。

2 符号说明与引理

2.1 常用符号说明

为了方便起见,我们对下文中常用的符号在此作一个统一的说明。

H_∞, H_2 代表标准的 Hardy 空间^[2], L_∞ 与 L_2 则代表标准 Lebesgue 空间^[2]。

1)国家自然科学基金资助项目。

收稿日期 1995-01-23

$\| \cdot \|_\infty$ 和 $\| \cdot \|_2$ 分别代表上述空间中元素的范数^[2].

L_{2e} 代表 L_2 空间的扩展空间^[1], $R_p(s)$ 代表所有具有实系数的 s 的真实有理函数的全体; $R_p^{n \times m}(s)$ 表示其元素属于 $R_p(s)$ 的 $n \times m$ 阶实有理矩阵的全体; 最后我们令

$$RH_\infty = H_\infty \cap R_p(s).$$

2.2 几个引理

引理 1. 设 $A \in RH_\infty$, $\|A\|_\infty < 1$, 则

$$\|(I + A)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \|A\|_\infty}. \quad (1)$$

证明. 参见参考文献[5], 这里从略.

引理 2. 设 $G(s) \in R_p(s)$, K 为常数, 再设 $1 + KG$ 有逆且有(其中 G 为 $G(s)$ 的简写)

$$G(1 + KG)^{-1} \in RH_\infty, \quad (2)$$

$$(1 + KG)^{-1} \in RH_\infty, \quad (3)$$

$$G(s) = N(s) \cdot D^{-1}(s).$$

其中 $(D(s), N(s))$ 为 $G(s)$ 的右互质因子^[2], 也可以简记为 (D, N) , 则

$$N(D + KN)^{-1} \in RH_\infty, \quad (4)$$

$$(D + KN)^{-1} \in RH_\infty. \quad (5)$$

证明. 利用文献[6](P167)中的一个引理可证明本引理, 由于篇幅所限, 这里从略.

在下一个引理中, 将会用到一个算子增益的概念, 其定义可参见文献[1].

引理 3. 考察如图 1 所示的非线性系统, 假设其非线性环节 $\phi(\cdot)$ 满足

$$\phi(0) = 0, k_1 \leq \phi(\sigma)/\sigma \leq k_2, \sigma \neq 0, \sigma \in R. \quad (6)$$

$W(s)$ 为线性部分的传递函数. 对于任何实数 k , 图 1 的系统等价于图 2 的系统, 而且当 $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$ 时, 图 2 的系统中的上半部分的虚线框所示的非线性环节的增益 $\gamma(\bar{H}_2)$ 有下面的估计式

$$\gamma(\bar{H}_2) \leq \frac{k_2 - k_1}{2}. \quad (7)$$

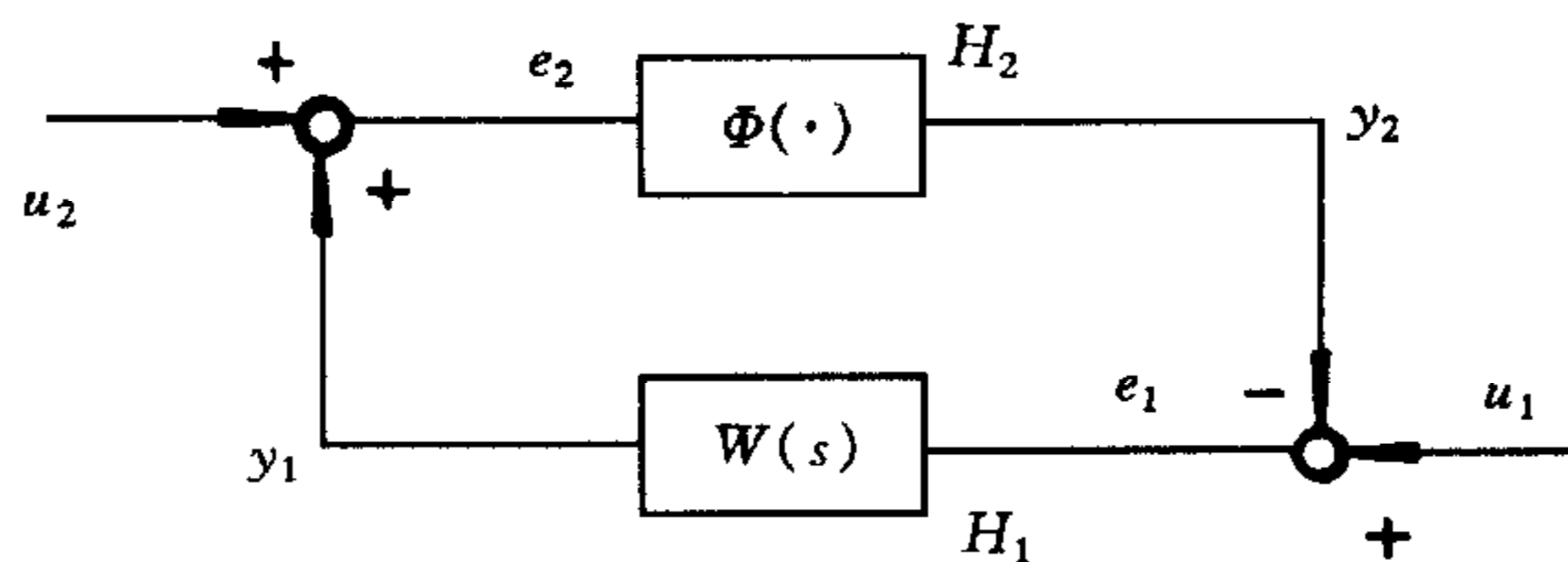


图 1

(注. 这里所说的等价是指图 1 与图 2 中从输入 u_1, u_2 到输出 e_1, e_2 的方程是一样的; 增益 $\gamma(\bar{H}_2)$ 的概念则是由算子增益概念而来)

证明. 参见文献[1] § 6.4.1, 经推导可证明本引理, 这里因篇幅所限从略.

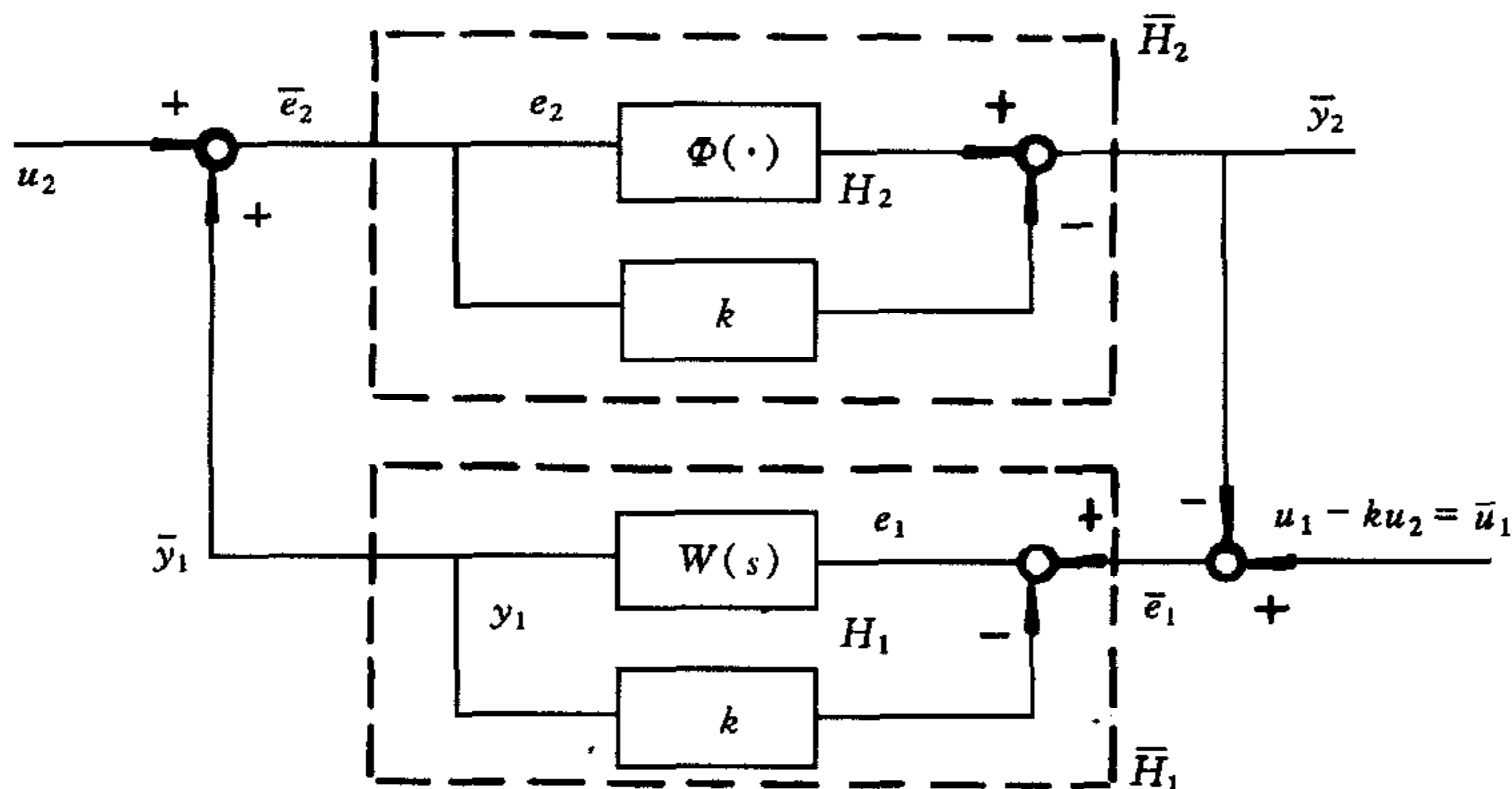


图 2

3 主要结果

为了便于下面的讨论,记 $c = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, $\gamma = \frac{1}{2}(k_2 - k_1)$, $k_2 > k_1$, 在复平面上以 $(-\frac{1}{k_1}, oj)$ 与 $(-\frac{1}{k_2}, oj)$ 为直径所做的圆记为 $c(k_1, k_2)$. 显然圆 $c(k_1, k_2)$ 上的点 $x + yj$ 应满足方程

$$\left[\frac{1}{2}(k_1^{-1} - k_2^{-1}) \right]^2 = (x + (k_1^{-1} + k_2^{-1}))^2 + y^2. \tag{8}$$

定理 1. 考察图 1 的闭环非线性系统, 设非线性环节的函数满足(6)式, 带摄动的线性环节为 $W(s)$, $W_0(s) \in R_p(s)$ 为其名义对象并且满足如下三个条件之一:

- 1) 当 $0 < k_1 < k_2$ 时, $W_0(s)$ 的奈氏轨线与 $c(k_1, k_2)$ 不相交且在圆外逆时针方向包围 $c(k_1, k_2)$ 的次数等于 $W_0(s)$ 在开右半平面的极点数;
- 2) 当 $0 = k_1 < k_2$ 时, $W_0(s)$ 的奈氏轨线位于横坐标为 $-\frac{1}{k_2}$ 的直线右方, 即

$$\text{Re}W_0(j\omega) > -\frac{1}{k_2}, \tag{9}$$

且 $W_0(s)$ 无正实部极点;

- 3) 当 $k_1 < 0 < k_2$ 时, $W_0(s)$ 的奈氏轨线完全位于圆 $c(k_1, k_2)$ 内, 且 $W_0(s)$ 的极点实部全部为负数. 另外, 设

$$W(s) = W_0(s) + \Delta W(s) \in R_p(s), \tag{10}$$

并且摄动量满足

$$\Delta W(s) \in RH_\infty, \text{ 且 } \|\Delta W(s)\|_\infty < \frac{1 - \gamma M_1}{(\gamma + c)M} = \delta_0. \tag{11}$$

其中 $\gamma = \frac{k_2 - k_1}{2}$, $c = \frac{k_1 + k_2}{2}$,

$$M = \sup_{\omega \in R} \left| \frac{1}{1 + cW_0(j\omega)} \right|, \tag{12}$$

$$M_1 = \sup_{\omega \in R} \left| \frac{W_0(j\omega)}{1 + cW_0(j\omega)} \right|, \quad (13)$$

则当 $u_1, u_2 \in L_2$ 时, 必有 $e_1, e_2 \in L_2$.

证明. 为节省篇幅, 这里仅证明 $W_0(s)$ 满足条件 3) 的情形, 其它情况可类似证明.

由引理 3 知, 图 1 的系统等价于图 2 的系统, 而且图 2 上半部分虚线框环节的增益有估计式 $\gamma(\bar{H}_2) \leq \frac{k_2 - k_1}{2} = \gamma$. 下面我们来说明当 $W(s) = W_0(s)$ 时, 图 2 系统下半部分虚线框的传递函数是稳定的. 令

$$\bar{W}_0(s) = \frac{W_0(s)}{1 + cW_0(s)}, \quad (14)$$

由于 $W_0(s)$ 满足条件 3), 不妨设 $|k_2| < |k_1|$, 则有

$$-\frac{1}{c} = -\frac{2}{k_1 + k_2} = -\frac{2}{|k_2| - |k_1|} < -\frac{2}{|k_2|} < -\frac{1}{|k_2|} = -\frac{1}{k_2}.$$

这表示 $(-\frac{1}{c}, 0j)$ 点位于 $c(k_1, k_2)$ 的左侧, 亦即位于圆 $c(k_1, k_2)$ 的外侧. 由 3) 的假设知, $W(s)$ 在闭右半平面无极点, 而且 $W_0(s)$ 的奈氏轨线都位于圆 $c(k_1, k_2)$ 的内部, 故它绕 $(-\frac{1}{c}, 0j)$ 逆时针方向旋转的圈数为零, 由奈氏判据知 $\bar{W}_0(s) \in RH_\infty$ 稳定.

现在估计 $\bar{W}_0(s)$ 的增益. $W_0(s)$ 在 $c(k_1, k_2)$ 圆内时, 令 $W_0(j\omega) = u(j\omega) + v(j\omega)$, 可得 $\left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right]^2 > \left[u + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \right]^2 + v^2$, 此式等价于

$$\left[\frac{1}{2} (k_2 - k_1) \right]^2 (u^2 + v^2) < (1 + cu)^2 + v^2 c^2; \quad (15)$$

而(15)式即 $\left(\frac{k_2 - k_1}{2} \right)^2 |W_0(j\omega)|^2 < |1 + cW_0(j\omega)|^2$, $\omega \in R$, 亦即

$$\left(\frac{k_2 - k_1}{2} \right) \cdot \sup_{\omega \in R} \left| \frac{W_0(j\omega)}{1 + cW_0(j\omega)} \right| < 1; \quad (16)$$

也就是 $\gamma(\bar{H}_2) \cdot \gamma(\bar{W}_0(s)) < 1$. (17)

由小增益定理知, $W(s) = W_0(s)$ 时, 图 2 所示系统是输入、输出稳定的.

下面证明当 $W_0(s)$ 受到满足(10)及(11)式的摄动时, 本定理结论成立. 为此, 首先证明当摄动 $\Delta W(s)$ 满足(11)式时,

$$\bar{W}(s) = \frac{W(s)}{1 + cW(s)} \in RH_\infty. \quad (18)$$

事实上, 因为

$$\bar{W}(s) = \frac{W_0(s)}{(1 + cW_0(s)) \left[1 + \frac{c\Delta W(s)}{1 + cW_0(s)} \right]} + \frac{\Delta W(s)}{(1 + cW_0(s)) \left[1 + \frac{c\Delta W(s)}{1 + cW_0(s)} \right]}, \quad (19)$$

由前面的证明过程可知

$$\frac{1}{1 + cW_0(s)} \in RH_\infty, \quad (20)$$

$$\frac{W_0(s)}{1 + cW_0(s)} \in RH_\infty. \quad (21)$$

再由引理 1 可得

$$\sup_{\omega \in R} \left| \frac{1}{1 + \frac{c\Delta W(j\omega)}{1 + cW_0(j\omega)}} \right| \leq \frac{1}{1 - cM\delta_0}. \quad (22)$$

由(11)式及(17)式知 $0 < M\delta_0 c = \frac{1 - \gamma M_1}{c + \gamma} \cdot c = \frac{1 - \gamma M_1}{1 + \frac{\gamma}{c}} < \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{c}} < 1$, 所以

$$1 - cM\delta_0 > 0, \quad \frac{1}{1 - cM\delta_0} > 0,$$

故式(22)是有意义的. 由(19)式可得

$$\sup_{\omega \in R} |\bar{W}(j\omega)| < \frac{M_1}{1 - M\delta_0 c} + \frac{M\delta_0}{1 - cM\delta_0} < \infty, \quad (23)$$

亦即 $\bar{W}(s) \in RH_\infty$. 由(7)式及(23)式最后可得

$$\gamma(\bar{H}_1) \cdot \gamma(\bar{H}_2) = \gamma(\bar{H}_2) \cdot \gamma(\bar{W}(s)) \leq \frac{k_2 - k_1}{2} \cdot \gamma(\bar{W}(s)) < 1. \quad (24)$$

由(24)式、小增益定理及引理 3 知, 本定理结论对图 2 系统, 从而也对图 1 所示系统成立. 证毕.

定理 2. 在定理 1 的条件中, 若 $W(s)$ 中的摄动不为(10)式所示形式, 而是互质因子型^[7], 即

$$W(s) = (N_0(s) + \Delta N(s)) \cdot (D_0(s) + \Delta D(s))^{-1}. \quad (25)$$

其中 $(D_0(s), N_0(s))$ 为 $W_0(s)$ 的右互质因子, $(\Delta D, \Delta N)^T \in RH_\infty$, 则只须将(11)式的条件改为

$$\left\| \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta N \end{bmatrix} \right\| < \frac{1 - T_1 \gamma}{T(1 + c + \gamma)} = \xi_0. \quad (26)$$

其中

$$T_1 = \| N_0(D_0 + cN_0)^{-1} \|_\infty, \quad (27)$$

$$T = \| (D_0 + cN_0)^{-1} \|_\infty, \quad (28)$$

而其它条件不变, 则定理 1 的结论仍能成立.

证明. 这里仍仅证明 $W_0(s)$ 满足条件 3) 的情形, 其它情形的证明类似.

利用定理 1 的证明, 这里直接证 $W_0(s)$ 受到满足(25)和(26)式的摄动时, 本定理结论成立.

令 $\bar{W}(s) = \frac{W(s)}{1 + cW(s)}$, 则可得

$$\begin{aligned} \bar{W}(s) &= N_0(D_0 + cN_0)^{-1} [1 + (\Delta D + c\Delta N)(D_0 + cN_0)^{-1}]^{-1} + \\ &\quad \Delta N(D_0 + cN_0)^{-1} [1 + (\Delta D + c\Delta N)(D_0 + cN_0)^{-1}]^{-1}. \end{aligned} \quad (29)$$

注意到

$$\| \Delta D \|_\infty \leq \left\| \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta N \end{bmatrix} \right\|_\infty < \xi_0, \quad (30)$$

$$\| \Delta N \|_\infty \leq \left\| \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta N \end{bmatrix} \right\|_\infty < \xi_0, \quad (31)$$

再利用引理 1 和引理 2 的结论可知

$$\| [1 + (\Delta D + c\Delta N)(D_0 + cN_0)^{-1}]^{-1} \|_\infty \leq \frac{1}{1 - T(1 + c)\xi_0}, \tag{32}$$

所以 $\| \bar{W}(s) \|_\infty < \frac{T_1}{1 - T(1 + c)\xi_0} + \frac{T\xi_0}{1 - T(1 + c)\xi_0} = \frac{T_1 + T\xi_0}{1 - T(1 + c)\xi_0}$. (33)

由定理 1 的证明知,当 $W(s) = W_0(s)$ 时图 2 所示系统满足 $\gamma(\bar{H}_1) \cdot \gamma(\bar{H}_2) = T_1 \cdot \gamma < 1$, 故有 $1 - \gamma \cdot T_1 > 0$, 从而可知 $\xi_0 > 0$, 进而由(26)式可得 $1 - T(1 + c)\xi_0 = T_1\gamma + T\xi_0\gamma > 0$; 再由引理 2 知, T, T_1 是有限正数, 故(32)与(33)式均有意义, 从而可得 $\bar{W}(s) \in RH_\infty$. 最后由(7)及(33)式可得

$$\gamma(\bar{H}_1) \cdot \gamma(\bar{H}_2) \leq \gamma \cdot \gamma(\bar{W}(s)) < \frac{T_1\gamma + T\xi_0\gamma}{1 - T(1 + c)\xi_0} = 1, \tag{34}$$

上式中最后一步由(26)式得到. 由(34)式可知, 当 $W(s)$ 取成(25)式且满足(26)式的摄动约束条件时, 图 2 的系统仍满足小增益定理, 故由引理 3 及小增益定理知, 定理 1 的结论仍成立. 证毕.

下面给出当 $W_0(s)$ 有摄动, 同时扇形斜率也有摄动时图 1 系统鲁棒 IO 稳定的判别条件.

定理 3. 在定理 1 的条件中, 除去线性部分 $W(s)$ 有摄动项外, 假设非线性函数所满足的扇形约束条件的斜率也有摄动, 即

$$k_1 = k_1^0 + \Delta k_1, \tag{35}$$

$$k_2 = k_2^0 + \Delta k_2. \tag{36}$$

再设对于满足如下扇形约束条件的鲁里叶系统

$$k_1^0 \leq \phi(e_2)/e_2 \leq k_2^0$$

1) 若其线性部分的摄动为(10)式的形式且 $\Delta W(s)$ 满足(11)式时, 定理 1 的结论正确, 则对于非线性斜率有摄动的情况, 只要

$$\| \Delta W(s) \|_\infty < \delta < \frac{1 - \gamma_0 M_1}{(c_0 + \gamma_0)M} = \delta_0, \tag{37}$$

$$|\Delta k_1| < \Delta, \quad |\Delta k_2| < \Delta, \tag{38}$$

并且 Δ, δ 满足

$$\Delta = \frac{1 - \gamma_0 M_1 - (c_0 + \gamma_0)M\delta}{2(M_1 + \delta M)} > 0. \tag{39}$$

其中 $\gamma_0 = \frac{k_2^0 - k_1^0}{2}$, $c_0 = \frac{k_1^0 + k_2^0}{2}$, M_1 与 M 的定义与定理 1 中的相同, 则定理 1 中的结论仍成立.

2) 若其线性部分的摄动为(25)式的形式且摄动部分满足式(26)的约束条件时, 定理 2 的结论成立, 则对于非线性斜率有摄动的情况, 只要

$$\left\| \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta N \end{bmatrix} \right\|_\infty < \xi < \frac{1 - T_1\gamma_0}{T(c_0 + \gamma_0 + 1)} = \xi_0, \tag{40}$$

$$|\Delta k_1| < \Delta, \quad |\Delta k_2| < \Delta, \tag{41}$$

并且 Δ, ξ 满足

$$\Delta = \frac{1 - T_1\gamma_0 - T\xi(c_0 + \gamma_0 + 1)}{2(T_1 + T\xi)} > 0. \tag{42}$$

其中 $c_0 = \frac{k_1^0 + k_2^0}{2}$, $\gamma_0 = \frac{k_2^0 - k_1^0}{2}$, T_1 与 T 的定义分别由式(27)和(28)确立, 则定理 2 的结论仍成立

证明. 由于篇幅所限, 这里仅对 2) 的情形进行证明, 1) 的情形较简单, 故证明从略.

由引理 3 知, 图 1 系统等价于图 2 的系统, 由定理 2 的证明知, 对于满足扇形约束条件的非线性函数 $\phi(e_2)$ 有 $k_1 \leq \phi(e_2)/e_2 \leq k_2$, $e_2 \neq 0$, $e_2 \in R$. 其中 k_1 和 k_2 由(35)和(36)式给出, 这样则有

$$\gamma(\bar{H}_2) \leq \frac{k_2 - k_1}{2} \leq \frac{k_2^0 - k_1^0}{2} + \Delta = \gamma_0 + \Delta. \quad (43)$$

由引理 2 知 T_1, T 为有限正数. 下面证明对于满足(40), (41)和(42)式的摄动, 如下传递函数

$$\bar{W}(s) = \frac{W(s)}{1 + cW(s)} \quad (44)$$

是属于 RH_∞ 的, 其中 $c = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $W(s)$ 由(25)式定义. 因为

$$\begin{aligned} \bar{W}(s) = & N_0(D_0 + c_0N_0)^{-1} \{ I + [\frac{\Delta k_1 + \Delta k_2}{2}(N_0 + \Delta N) + \Delta D + c_0\Delta N] \cdot \\ & (D_0 + c_0N_0)^{-1} \}^{-1} + \Delta N(D_0 + c_0N_0)^{-1} \{ I + [\frac{\Delta k_1 + \Delta k_2}{2} \cdot \\ & (N_0 + \Delta N) + \Delta D + c_0\Delta N] (D_0 + c_0N_0)^{-1} \}^{-1}. \end{aligned} \quad (45)$$

由(27), (28), (30), (31), (40), (42)及引理 1 知

$$\begin{aligned} \left\| \left\{ I + \left[\frac{\Delta k_1 + \Delta k_2}{2} (N_0 + \Delta N) + \Delta D + c_0\Delta N \right] (D_0 + c_0N_0)^{-1} \right\}^{-1} \right\|_\infty \leq \\ \frac{1}{1 - T_1\Delta - T\Delta\xi - (c_0 + 1)T\xi}, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\text{所以} \quad \|\bar{W}(s)\|_\infty < \frac{T_1 + T\xi}{1 - T_1\Delta - T\Delta\xi - (c_0 + 1)T\xi}. \quad (47)$$

由(42)式知

$$1 - T_1\Delta - T\Delta\xi - (c_0 + 1)T\xi = (\gamma_0 + \Delta)(T_1 + T\xi) > 0, \quad (48)$$

而 T, T_1 为有限正数, 故(48)式右端为有限正数, 所以(47)式有意义且 $\bar{W}(s) \in RH_\infty$. 由(47)式知

$$\gamma(\bar{H}_1) = \gamma(\bar{W}(s)) < \frac{T_1 + T\xi}{1 - T_1\Delta - T\Delta\xi - (c_0 + 1)T\xi},$$

再由(43)及(48)式可得

$$\gamma(\bar{H}_1) \cdot \gamma(\bar{H}_2) < \frac{(T_1 + T\xi)(\gamma_0 + \Delta)}{1 - T_1\Delta - T\Delta\xi - (c_0 + 1)T\xi} = 1, \quad (49)$$

所以图 2 的系统满足小增益定理, 再由引理 3 和小增益定理可知本定理结论成立.

定理 3 证毕.

注 1. 定理 1 的(11)式中的分子 $1 - \gamma M_1$ 正好是文献[1]中所说的关于图 2 系统的增益裕度, 这样通过(11)式就将系统增益裕度与系统本身的品质建立了联系, 定理 2 与定理 3 中也包含相同的结论.

注 2. 由于在定理 2 和定理 3 中采用互质因子分解摄动来考察对象的不确定性, 故

$W(s)$ 相对于 $W_0(s)$ 的不确定性可以是不稳定的^[7], 这是对于用 H_∞ 范数度量系统不确定性的一个突破, 下节的例 2 将说明这一点.

4 算 例

为了说明上述定理的有效性, 针对定理 1 和定理 2 分别给出一个算例.

例 1. 设名义对象 $W_0(s) = \frac{1}{s+3}$, 非线性函数满足的扇形条件为 $\phi(\cdot) \in [0, 2]$, 即 $k_1=0, k_2=2$, 按(11)式求系统线性部分的摄动界.

解. 因为 $\phi(\cdot) \in [0, 2]$, 所以 $\gamma=c=\frac{k_2}{2}=1$.

将 $M_1 = \gamma(\bar{H}_1) = \left\| \frac{W_0(s)}{1+cW_0(s)} \right\|_\infty = 0.25$, $M = \left\| \frac{1}{1+cW_0(s)} \right\|_\infty = 1$, 代入(11)式可得

$\delta_0 = \frac{1-\gamma T_1}{M(c+\gamma)} = 0.375$. 亦即原系统若带有一定的不确定性, 则只要其不确定的 H_∞ 范数

小于 $\delta_0 = 0.375$, 则原系统仍可保持 IO 稳定. 如不妨设实际对象为 $W(s) = \frac{2}{s+3}$, 则系统

的摄动 $\Delta W(s) = W(s) - W_0(s) = \frac{1}{s+3}$. 因为 $\|\Delta W(s)\|_\infty = \left\| \frac{1}{s+3} \right\|_\infty = 0.333$, 所以由

定理 1 知原系统仍保持 IO 稳定.

例 2. 设名义对象 $W_0(s) = 100$ 为一常数, 非线性函数 $\phi(\cdot)$ 所满足的扇形条件为 $\phi(\cdot) \in [1.99, 2.01]$, 即 $k_1=1.99, k_2=2.01$, 试计算定理 2 中的 ξ_0 .

解. 先取一个 $W_0(s)$ 的互质因子分解, 不妨设 $W_0(s) = 100 = 1 \times \frac{1}{\frac{1}{100}} = N_0 \cdot D_0^{-1}$, 即

$D_0 = \frac{1}{100}, N_0 = 1$; 又因为 $\phi(\cdot) \in [1.99, 2.01] \Rightarrow c = \frac{k_1+k_2}{2} = 2, \gamma = \frac{k_2-k_1}{2} = 0.01$; 再由

(27)和(28)式求得 T_1 与 T 分别为 $T_1 \doteq 0.4975, T \doteq 0.4975$; 最后代入(26)式得 $\xi_0 =$

$\frac{1-\gamma T}{T(1+c+\gamma)} \doteq 0.6645$. 亦即任何相对于 $W_0(s)$ 其互质因子分解摄动量小于 ξ_0 的带摄动系

统, 仍可保持 IO 稳定. 例如: 不妨设 $W(s) = \frac{s+1.3}{0.51s-0.489}$, 这是个带不稳定极点的对

象, 用 H_∞ 范数难以给出其度量, 用因子分解法:

$$W(s) = \frac{\frac{s+1.3}{s+1.1}}{\frac{0.51s-0.489}{s+1.1}} \Rightarrow N = \frac{s+1.3}{s+1.1}, D = \frac{0.51s-0.489}{s+1.1},$$

则 $\Delta D = D - D_0 = \frac{0.5(s-1)}{s+1.1}, \Delta N = N - N_0 = \frac{0.2}{s+1.1},$

所以 $\left\| \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta N \end{bmatrix} \right\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\frac{0.25\omega^2 + 0.04 + 0.25}{\omega^2 + 1.21}} = 0.5.$

因为 $0.5 < 0.6645 = \xi_0$, 所以对 $W(s)$ 原系统仍 IO 稳定.

5 结 论

通过上面几节的讨论可以看出, 本文所得到的鲁里叶系统 IO 稳定性上界, 确实对系

统 IO 稳定性的鲁棒性给出了一种定量表示. 由此结论可以保证很大一簇系统的 IO 稳定性成立, 而且这一簇系统中可以包含带不稳定摄动的系统.

参 考 文 献

- 1 高为炳. 非线性控制系统导论. 北京: 科学出版社, 1990. 262—290
- 2 Francis B A. A Course in H_∞ Control Theory. New York: Springer-Verlag, 1987. 8—14
- 3 Doyle J C, Glover K, Khargonekar P, Francis B A. State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problem. *IEEE Trans. Autom. Control.*, 1989, **34**: 831—847
- 4 Barmish B R, Kang H I. A survey of extreme point results for robustness of control systems. *Automatica*, 1993, **29**: 13—35
- 5 Habets L. Robust Stabilization in the Gap-Topology. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 25
- 6 Kato T. Perturbation Theory for Linear Operator. New York: Springer-Verlag, 1966. 167
- 7 Mcfanlane D C, Glover K. Robust Controller Design Using Normalized Comprime Factor Plant Description. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 24—50

H_∞ NORM PERTURBATION MARGINS OF ROBUST INPUT-OUTPUT STABILITY FOR LUR'E SYSTEMS

CHEN HUI

(Planning Research Institute of the Ministry of Posts and Telecommunications, Beijing 100037)

HUANG LIN

(Dept. of Mechanics, Peking University, Beijing 100871)

Abstract This paper discusses the problem of robust input-output stability of Lur'e systems. The system's perturbation margins, which will enable the system to maintain input-output stability in the presence of both linear element and nonlinear element perturbations, are given. In addition, two examples are given to illustrate the effectiveness of the perturbation margins.

Key words Lur'e systems, robust input-output stability, perturbation margin.

陈 辉 1967 年生. 1989 年毕业于山东大学数学系控制科学专业, 获理学学士学位. 1992 年在山东大学获运筹学与控制论专业理学硕士学位. 1995 年获北京大学力学系一般力学专业理学博士学位. 现在邮电部规划研究院从事电信网络的优化及规划理论研究. 主要研究工作兴趣为: 通信网络的优化理论、 H_∞ 控制、鲁棒控制.

黄 琳 见《自动化学报》1993 年第 19 卷第 2 期.