非线性 H_∞ 控制的粘性解及近似逼近分析[1)]

洪奕光
(中国科学院系统科学研究所 北京 100080)
梅生伟
(清华大学电机系 北京 100084)
秦化淑
(中国科学院系统科学研究所 北京 100080)
翁绍鹏
(香港大学数学系 香港)

摘 要 讨论非线性(在鞍点条件成立时)H_∞控制的(干扰抑制问题的)粘性解法.此方法基于对策论和 Hamilton-Jacobi-Isaacs (HJI)不等式. 主要结果分三个方面. 首先，是将所求的关于 HJI 不等式的解推广到不可微的粘性解情形.随后，讨论了此情形下的 H_∞状态控制器对被控系统的镇定问题.最后给出了求解该问题的近似逼近的理论依据和算法的初步讨论.

关键词 非线性 H_∞，鞍点条件，粘性解，近似逼近.

1 引言

鲁棒控制越来越成为控制界日益关注的重要课题，并已从许多不同的角度(包括 H_∞)得出不少有意义的结果. 其中，非线性 H_∞控制是近年来一个十分热门的研究方向，并涉及了工程控制中的干扰抑制等问题.实际上，由于一些限制(如不确定性的种类，控制的增益等)的影响，使得我们在一些具体问题中对系统中的某些不确定性难以实现干扰解耦，或用匹配及其推广条件来消除干扰以保证系统镇定. 因此一个现实的提法是通过控制使得我们所需调整的输出量尽可能对干扰信号不敏感，这就是非线性 H_∞控制和干扰抑制的基本思想. 而控制理论的发展(尤其是线性 H_∞技术已日益完善)，从理论上为非线性系统也提供了有效方法，即非线性 H_∞技术.

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x,u,w), \\ z = Z(x,\ u), \\ y = Y(x,\ w). \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 $F, Z, Y \in C^1$；$x \in R^n$ 状态变量；$u \in U \subset R^m$ 控制变量；$w \in W \subset R^l$ 外界干扰；$z \in R^k$ 调节输出变量；$y \in R^s$ 量测输出变量.

定义 1. 非线性 H_∞问题(或非线性干扰抑制)就是要对系统(1.1)寻找最小的正数 λ^*，$\forall\ \lambda > \lambda^*$，总可设计一个控制器(如果状态可量测)

1)本文得到国家自然科学基金资助.
收稿日期 1996-05-23

$$u = u(x) \tag{1.2}$$

或(如果状态不能直接得到)

$$u = u(y,\xi), \dot{\xi} = \eta(y,\xi). \tag{1.3}$$

使得:

1) 当初值为零时,

$$\int_0^T z^{\mathrm{T}} z \mathrm{d}s \leqslant \lambda^2 \int_0^T w^{\mathrm{T}} w \mathrm{d}s,\ T > 0. \tag{1.4}$$

2) 内部稳定性: 当 $w=0$ 时, 该控制器能使相应的闭环系统渐近稳定.

为方便起见, 本文以下只考虑状态反馈(1.2)的情形.

利用二人零和微分对策理论可帮助解决上述问题[2], 即化为: 在假定鞍点条件成立时, 能否找到一个非负函数 V 且满足 $V(0)=0$, $\forall\ t>t_0\geqslant 0$ 使下式成立,

$$V(x(t_0)) = \inf_u \sup_w (V(x(t)) + \int_{t_1}^t (z^{\mathrm{T}} z - \lambda^2 w^{\mathrm{T}} w) \mathrm{d}s).$$

实际上, 在非线性 H_∞ 问题里, 通常将等式化为不等式, 以便于求解. 因此, 我们将从不等式

$$V(x(t_0)) \geqslant \inf_u \sup_w (V(x(t)) + \int_{t_1}^t (z^{\mathrm{T}} z - \lambda^2 w^{\mathrm{T}} w) \mathrm{d}s) \tag{1.5}$$

出发. 利用 Hamilton 函数 $\hat{H}(x,p,u,w) = pF + z^{\mathrm{T}} z - \lambda^2 w^{\mathrm{T}} w$, 可得 Hamilton-Jacobi-Issacs 微分不等式

$$H(x,DV) = \inf_u \sup_w (DV \cdot F + z^{\mathrm{T}} z - \lambda^2 w^{\mathrm{T}} w) \leqslant 0. \tag{1.6}$$

其中, D 表示关于 x 的 Dini 导数.

众所周知, 不等式(1.5)和(1.6)也不易求解, 而通常为了解此问题, 还不得不假定光滑函数 V 是存在的[1], 这可能在某些时候会影响控制器的设计性能.

在偏微分方程及不等式中早已有粘性解的研究[3,4], 并且也已用到非线性(随机)最优控制中[5,6,7], 说明了其具有广泛的可应用性. 从已有的理论中可知, 当微分不等式(或微分等式) (1.6) 将没有光滑解时(比如, L_2增益 λ 小到一定时), 但是其粘性解可能还是存在的[5]. 同时, 粘性解的应用还可以扩大解的有效适用范围. 而若只在光滑意义下, 有时就不得不多个工作点去做局部小范围设计. 总之, 粘性解的采用不仅具有理论意义, 也具有较强的实际意义. 其中, 文[9] 从粘性上解角度, 非线性 H_∞ 可解的充分与必要条件, 并证明了在输入集是紧的情形下充分条件就是必要的. 文[9]中讨论的系统 F,Z 要满足类似于 Lipschitz 条件, 而且利用动态规划及值函数研究 V 解的结构和性质. 本文将分别从两个方面讨论此问题. 第一, 利用粘性解讨论 V 是不光滑的情况(也可包括原来光滑的情形), 从耗散不等式出发, 讨论粘性解的必要条件. 还同时证明其内部稳定性; 第二, 给出一个用近似解, 去逼近精确解的算法的理论依据.

2 Hamilton Jacobi Isaacs 不等式的粘性解

考虑到非线性 H_∞, 包括两个方面的问题: 1. 如何选取尽可能小的, 且代表干扰抑制性能的 L_2增益 λ. 实际上, 在一个具体的求解不等式的过程中, 同时就可考虑能否进一

步使 λ 的数值变小而不影响不等式解的存在性. 2. 对已经给定的增益，如何给出合适的控制器. 这需要先求解 Hamilton-Jaccobi-Isaacs 不等式.

一般地，考虑 R^n 中开集 Q 上的一阶偏微分不等式

$$P(z,\ V(z),\ DV(z)) \leqslant 0. \tag{2.1}$$

这里 $z\in Q, P: Q\times R\times R^n \to R,\ V(\cdot)\in C^1(Q)$.

很多情况下，(2.1)并不存在光滑解. 因此我们考虑 $V(\cdot)$是局部有界时的情形.

定义 2. 局部有界函数 $V(\cdot)$是(2.1)的一个粘性解，如果对任何$\varphi(\cdot)\in C^1(Q)$，只要 $V_*(\cdot)-\varphi(\cdot)$在 $z_0\in Q$ 达到局部极小，则有

$$P(z_0,\ V(z_0),\ D_\varphi(z_0)) \leqslant 0. \tag{2.2}$$

其中 V_*是 V 的下半连续包，即

$$V_*(x) = \liminf_{z\to x} V(z). \tag{2.3}$$

为了解非线性 H_∞，通常需以下基本假设[1]：

$A1)$ $\dfrac{\partial Z}{\partial u}(0,\ 0)$是行满秩的. 此条件保证了上述二人零和对策问题满足鞍点条件. 即由此可知，$\tilde{H}$ 有唯一的局部鞍点(w,u)，即存在连续函数 $\boldsymbol{w}_*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ 和 $\boldsymbol{u}_*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ 使得

$$\tilde{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}_*) \leqslant \tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{w}_*,\boldsymbol{u}_*) \leqslant \tilde{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{w}_*,\boldsymbol{u}), \tag{2.4}$$

在(0,0,0,0)的一个邻域内成立. 其中 $u_*(0,0)=0, w_*(0,0)=0$.

$A2)$ 系统(1.1)零状态可检测($\boldsymbol{w}=0$ 时)：$\boldsymbol{z}=0$ 可推出 $\boldsymbol{x}\to 0$.

由于 V 通常只是局部有界，故我们常用 V_*来分析. 另外注意到本节的结果可适用于鞍点条件不成立的情形(详见文[8]).

命题 1[8]. 如果一个局部有界的半正定函数 V 满足(1.5)，那么它的下半连续包 $V_*(\boldsymbol{x})$也满足(1.5).

下面我们对(1.6)给出类似的结果. 为此我们先证明：

定理 1. 若 V 满足(1.5)，V 就满足(1.6).

证明. 由于 V 不一定光滑，所以不能直接求导. 设 $L=\lambda^2\boldsymbol{w}^{\mathrm T}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z}^{\mathrm T}\boldsymbol{z}$. 若取 $\varphi\in C^1(Q)$，假定 $V_*-\varphi$ 在 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\in R^n$ 达到局部极小，我们将证

$$H(\boldsymbol{x}_0,\ D\varphi(\boldsymbol{x}_0)) = \inf_{x}\sup_{w}(D\varphi(\boldsymbol{x}_0)F(\boldsymbol{x}_0) - L(\boldsymbol{x}_0)) \leqslant 0. \tag{2.5}$$

对 $t\geqslant t_0$，取常值 $\boldsymbol{w}$ 及最优控制 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})\in U$,记 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},t)$.

对 $t\geqslant t_0$ 使 $t-t_0$ 充分小，且由命题 1，我们有(因 x_0 是极小点)

$$\varphi(\boldsymbol{x}_0) - \varphi(\boldsymbol{x}(t)) \geqslant V_*(\boldsymbol{x}_0) - V_*(\boldsymbol{x}(t)) \geqslant -\int_{t_0}^{t} L(\boldsymbol{x}(r))\mathrm{d}r.$$

于是两边除以 $t-t_0$ 再令 $t\to t_0$，就可得 $D_\varphi(\boldsymbol{x}_0)F(\boldsymbol{x}_0)-L(\boldsymbol{x}_0)\leqslant 0$，因此(2.5)成立，故得证.

Q. E. D

由于(1.6)可能推出(1.5)，也就是说上述定理表明即使在粘性解意义下(1.5)与(1.6)也是等价的. 因此易得如下结论.

定理 2. 如果一个局部有界的非负函数 V 满足(1.6)，那么 V_*也满足(1.6).

证明. 记 W 是干扰集. 对 $R>0$，定义 $U_R=\{(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w})\,|\,\boldsymbol{u}\in U,\boldsymbol{w}\in W,\ \|(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w})\|\leqslant R\}$. 选择$\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}\subset C(R^n)$ 使得 $\phi_i\leqslant V_*$(当 $i\to\infty$时，V_*是 ϕ_i 的上极限函数).

令$(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{u})\in U_R$，取$T>0$，定义

$$Z_R^i(\boldsymbol{x},\ s)=\inf_{x}\sup_{w}(\phi_i(\boldsymbol{x}(T))-\int_s^T L(r)\mathrm{d}r),\qquad \boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{x}$$

那么$Z_r^i\in C(R^n\times(t_0,\ T))$且是下列方程的唯一解，

$$\frac{\partial Z_R^i}{\partial s}+\inf_{x}\sup_{w}(DZ_R^iF-L)=0,\quad Z_R^i(\boldsymbol{x},T)=\phi_i(\boldsymbol{x}).$$

现在V_*是此方程的粘性上解，由比较定理[3]

$$V^*\geqslant Z_R^i(\boldsymbol{x},\ s),\ \forall\ (\boldsymbol{x},\ s)\in R^n\times[t_0,T].$$

令$s=t_0$，就有：当$(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w})\in U_R$时

$$V_*(x)\geqslant\inf_{x}\sup_{w}(\phi_i(\boldsymbol{x}(T))-\int_{t_0}^T L(r)\mathrm{d}r);$$

令$i\to\infty$，再令$R\to\infty$，就有$V_*\geqslant\inf_{x}\sup_{w}(V_*(\boldsymbol{x}(T))-\int_{t_0}^T L(r)\mathrm{d}r)$对$\forall\ \boldsymbol{u}\in U,\boldsymbol{w}\in W$成立.因此$V_*$满足(1.5)，由定理1，$V_*$也就满足(1.6). *Q. E. D.*

由此看出，可以把HJI不等式在光滑解意义下的结果推广到粘性解的结果.

3 非线性H_∞的粘性解及其控制器

本节将说明，粘性解意义下的控制器设计也将与光滑的情形类似.

定理3. 假定系统(1.1)满足上面两个基本假设，且V是定义在原点邻域满足(1.6)的局部有界非负粘性解，而且它在原点处连续并在某邻域内正定和$V(0)=0$. 那么控制律$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_*(\boldsymbol{x},DV)$就可使系统(1.1)满足(1.4),且无干扰时内部稳定性.

证明. 注意

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})=\widetilde{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{w}_*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}),\boldsymbol{u}_*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})).\tag{3.1}$$

由$\widetilde{H}(\boldsymbol{x},\ DV,\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}_*)\leqslant H(\boldsymbol{x},DV)\leqslant 0$和(2.4),可知(1.4)也成立. 另外，当$\boldsymbol{w}=0$时，有

$$V(\boldsymbol{x}(t))|_{u=u_*}-V(\boldsymbol{x}_0)\leqslant-\int_0^t\|Z\|^2ds\leqslant 0,\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0.\tag{3.2}$$

由V的正定性可知存在一个严格增的连续函数$b:[0,\infty)\to[0,\infty),b(0)=0$,且$V(\boldsymbol{x})\geqslant b(|\boldsymbol{x}|)$. 因此有$V_*(\boldsymbol{x})\geqslant b(|\boldsymbol{x}|)$. 对任给$\varepsilon>0$,由$V$在原点的连续性，就存在$\delta>0$,使得$|\boldsymbol{x}|<\delta$时$V_*(\boldsymbol{x})<b(\varepsilon)$. 由定理1和2可知,$V_*$也满足(3.2). 于是有

$$b(|\boldsymbol{x}(t)|)\leqslant V_*(\boldsymbol{x}(t))\leqslant V_*(\boldsymbol{x}_0)<b(\varepsilon)\qquad t\geqslant 0.$$

只要$|\boldsymbol{x}_v|<0$. 因此$|\boldsymbol{x}(t)|<\varepsilon$. 故稳定性可证.

下面证明渐近稳定性. 考虑对充分小初始值的某个ω-极限集Γ. 记

$$\boldsymbol{x}(t)=\rho(\boldsymbol{u}_*,0,\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}_0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{V}_*(\boldsymbol{x}(t))=c\geqslant 0.$$

当$\bar{\boldsymbol{x}}\in\Gamma$且$V_*(\bar{\boldsymbol{x}})=c$时，因为(3.2)，$V_*(\rho(\boldsymbol{u}_*,0,t)\bar{\boldsymbol{x}})$不会大于$c$. 另外，既然$\bar{\boldsymbol{x}}$极限集上的点，那么$\forall\ i$就有$t_i$使$|\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{x}}|\leqslant\frac{1}{i}$. 其中$\boldsymbol{x}_i=\rho(\boldsymbol{u}_*,0,t_i)\bar{\boldsymbol{x}}$及$\lim_{i\to\infty}t_i=\infty$,因此有$\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_i=\bar{\boldsymbol{x}}$. 注意到$V_*$的定义,于是就有一序列$\{x_i^j\}$，使$V_*(\boldsymbol{x}_i)=\lim_{j\to\infty}V(x_i^j)$. 再由于$\lim_{i\to\infty}\lim_{j\to\infty}\boldsymbol{x}_i^j=\bar{\boldsymbol{x}}$,可得

$$V_*(\bar{x}) = \lim_{i\to\infty}\inf V(x_i) \leqslant \lim_{i\to\infty}\lim_{j\to\infty} V(x_i^j) = \lim_{i\to\infty} V_*(x_i). \tag{3.3}$$

另外，根据 (3.2) 可知 $z(x,u_*,0)=0,\forall x\in\Gamma$. 再由零可检测假定，有 $\lim_{i\to\infty}\rho(u_*,0,t)\bar{x}=0$，因此 $c=0$. 再从 $\lim_{j\to\infty}V_*(x(t))=0$ 和 V_* 在原点附近的正定性，可推出 $\lim_{j\to\infty}x(t)=0$，即闭环系统的渐近稳定性. *Q. E. D.*

推论 1. 条件同上，那么控制律 $u=u_*(x,DV_*)$ 也同样解决(1.1) 的干扰抑制问题.

注. 本定理中要求 V 在原点处连续，且某邻域内正定是强于 V 有界非负，但这仍比 V 光滑正定条件弱很多. 其实，它只是充分条件(因由零可检测).

综上两节，非线性 H_∞ 控制的许多结论都 可从光滑解的情形推广到非光滑解的情形.

4　近似逼近分析

理论上我们知道直接求解(1.5)和(1.6)通常是很困难的，因此就有必要讨论求解的近似方法. 也就是说，用一簇系统 Σ^ε

$$\dot{x} = F^\varepsilon(x, u, w), \quad z = Z^\varepsilon(x, u) \tag{4.1}$$

来逼近系统 Σ

$$\dot{x} = F(x, u, w), \quad z = Z(x, u). \tag{4.2}$$

即当 $\varepsilon\to 0$ 时，令 $F^\varepsilon\to F$ 和 $Z^\varepsilon\to Z$ 局部一致收敛. 注意一致收敛不能保持光滑性.

自然我们可以将 Σ^ε 取得简单易求，然后用它的解来逼近 Σ 的解. 下面的定理表明，这样做是可行的.

定理 4. 假定

1)任意 Σ^ε 满足(1.5)且其解 V^ε 满足

$$\sup_\varepsilon \| V^\varepsilon \|_{L^\infty_{loc}(R^n)} < \infty, \tag{4.3}$$

2)相应的 Hamilton 函数有

$$\lim_{\varepsilon\to 0 z\to x q\to p}\inf H^\varepsilon(z,q) \geqslant H(x,p), \tag{4.4}$$

那么系统 Σ 有粘性解满足(1.5)且

$$V(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{z\to x} V^\varepsilon(z). \tag{4.5}$$

证明. 因为 (4.3) 易知，由(4.5) 定义的 V 存在且局部有界非负(由(2.3) 可知 V 是下半连续). 取 $\phi\in C^1(R^n)$，不失一般性，设 $V-\phi$ 在 $x_0\in R^n$ 达到局部严格极小. 故可选取一子列，当 $i\to\infty$ 时，$\varepsilon_i\to 0$ 且

$$V^{\varepsilon_i}(x^{\varepsilon_i}) \to V(x_0), x^{\varepsilon_i} \to x_0. \tag{4.6}$$

同时，$V^{\varepsilon_i}-\phi$ 在 x^{ε_i} 达到局部严格极小 (因 x^{ε_i} 是人为选取的，且 $V-\phi$ 在 x_0 达到极小).
因为 Σ^{ε_i} 满足(1.5)，由定理 2 得

$$H^{\varepsilon_i}(x^{\varepsilon_i}, D\phi(x^{\varepsilon_i})) \leqslant 0, i = 1,2,\cdots. \tag{4.7}$$

取 $i\to\infty$，就得

$$H(x_0, D\phi(x_0)) \leqslant 0. \tag{4.8}$$

故得证.

注. 此定理是在邻域内讨论近似逼近的，但可推广到一个给定的合适闭集上. 另外，注意到它本身涉及的是逼近粘性解，自然也适用于逼近某种意义下的光滑解. 因此一些经典的讨论也可包含在其中. 同时要注意到此定理也未涉及鞍点条件，但鞍点条件具有重要的实际意义：它使得最优控制器与干扰无关而只要考虑状态变量即可.

该定理为近似算法给出了理论依据. 这里再给出一个多项式的算法：假定(4.2)是使鞍点条件成立的仿射非线性系统，即

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = f_0(\boldsymbol{x}) + f_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + f_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}, Z(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = h_0(\boldsymbol{x}) + h_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}. \tag{4.9}$$

这里 Z 满足基本假设 $A1$. 现以多项式系统族 $\sum^{\varepsilon}$

$$F^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = f_0^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) + f_1^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + f_2^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}, Z^{\varepsilon}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = h_0^{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) + h_1^{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}. \tag{4.10}$$

取 $N^{\varepsilon}(\lim_{\varepsilon\to 0}N^{\varepsilon}=\infty)$ 与

$$f_j^{\varepsilon} = \sum_{d=1}^{N^{\varepsilon}} f_j^{[d]}(\boldsymbol{x}) \quad j = 0,1,2. \quad h_k^{\varepsilon} = \sum_{d=1}^{N^{\varepsilon}} h_k^{[d]}(\boldsymbol{x}) \quad k = 0,1.$$

去逼近此系统(4.2)（其中 $[d]$ 代表齐次多项式的阶数），使得在给定的 $\boldsymbol{x}=0$ 某有界邻域上有 $\|F^{\varepsilon}-F\|<\varepsilon$ 与 $\|Z^{\varepsilon}-Z\|<\varepsilon$. 定义在此邻域内的多项式正定函数族 $V^{\varepsilon}:R^n\to R$ 且 $V^{\varepsilon}(0)=0$. 随后取相应的多项式 $\boldsymbol{w}_*^{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{u}_*^{\varepsilon}$ 使

$$H(\boldsymbol{x},DV^{\varepsilon}) \leqslant 0, \quad H(\boldsymbol{x},DV) = \lim_{\varepsilon\to 0, z\to x} H(z,DV^{\varepsilon})$$

去满足此定理的条件. 因此可通过对多项式系统族的解来逼近原系统关于非线性 H_∞ 的解. 其中可采用计算机符号演算. 至于如何求解多项式系统的非线性 H_∞ 问题（可参见文[1]中的例子），这里限于篇幅，不予详细讨论.

5 结束语

本文推广了非线性 H_∞ 问题可解的涵义（不一定光滑），具有较强的实际意义. 又考虑了其粘性解和控制器的一些性质. 第四节中讨论了近似算法的理论依据. 另外，关于近似算法的构造，还可以利用神经网络方法等. 也可依据粘性消去法的思想，在不等式(1.6)的左端加上粘性项，其中包含一个常系数的二阶椭圆型微分算子. 如此，则可用可微的古典解去逼近(1.6)的粘性解. 还有一个有意义的推广是用粘性解理论进行输出反馈(1.3)的设计.

参 考 文 献

1 Isidori A, Kang W. H_∞ control via measurement feedback for general nonlinear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1995, **40**(3): 466—471

2 Basar T, Berhard P. H^∞-opitmal control and related minimax design problems. Boston: Birhäuser, 1991

3 James M R. A partial differential inequality for dissipative nonlinear systems. *Syst. Contr. Lett.*, 1993, **21**(4): 315—320

4 Cranndall M, Evans L, Lions P L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. AMS*, 1984, **282**(2): 487—502

5 Lions P L, Souganidis P E. Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman's and Issac's equations. *SIAM J. Contr. Optim.*, 1985, **23**(2): 566—583

6 Hermes H. Resonance, stabilizing feedback controls, and regularity of viscocity solutions of Hamilton-Jacobi-Bell-

man equations. *Mathematics of Control, Signal, and Systems* 1996,**9**(1):59—72

7 James M R. Asymptotic analysis of nonlinear stochastic risk-sensitive control and differential games. *Math. of Control,Signal, and Systems*, 1992,**7**(3): 401—417

8 洪奕光，翁绍鹏，梅生伟，秦化淑. 非线性 H_∞控制的粘性解法. 科学通报，1996,**42**(7):673—676

9 Soravia P. H_∞ control of nonlinear systems: differential games and viscosity solutions,*SIAM J. Contr. Optim.*, 1996,**35**(3): 1071—1097

VISCOCITY SOLUTIONS AND APPROXIMATE ALGORITHM ANALYSIS OF NONLINEAR H_∞ CONTROL

HONG YIGUANG
(*Institute of Systems Science,The Chinese Academy of Sciences,Beijing* 100080)
MEI SHENGWEI
(*Dept. of Electrical Engineering,Tsinghua University,Beijing* 100084)
QIN HUASHU
(*Institute of Systems Science,The Chinese Academy of Sciences,Beijing* 100080)
YUNG SIUPANG
(*Dept. of Mathematics,Hong Kong University,Hong Kong*)

Abstract The H_∞ problem of nonlinear control systems is studied in the sense of viscocity solution. The motivation on the study of viscocity solution of nonlinear H_∞ control with the saddle point condition is due to the difficulty in the analysis of smooth solutions in some cases. The method is based on the game theory and Hamilton-Jacobi-Issacs (HJI) inequality. The main results are composed of three parts. The solution of HJI inequality of disturbance attenuation has been extended to the case without any assumption of smoothness. A control law in the light of the viscocity optimal solution is given, with a proof of the system stabilization when external disturbance vanishes. At last, some analyses on approximate algorithms are proposed for the nonlinear H_∞ problems and a draft approxiamte polynomial algorithm is described.

Key words Nonlinear H_∞, saddle point, viscocity solution,approxiamte algorithm.

洪奕光 1966 年生，1993 年在系统所获得博士学位. 1994—1995 年期间在香港理工大学做博士后. 1995 年在中国科学院系统所为副研究员. 主要研究兴趣:非线性建模，控制及其应用.

梅生伟 1964 年生，1996 年在系统所获得博士学位. 现在在清华大学电机系做博士后. 主要研究兴趣: 非线性控制和电力系统应用.

秦化淑 1934 年生，系统所研究员. 主要研究兴趣: 非线性控制和机器人研究.

翁绍鹏 在香港大学数学系任教. 主要研究兴趣: 非线性最优控制和粘性解分析.