第 24 卷 第 4 期
1998 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 4
Jul., 1998

# 关于非线性 Morgan 问题的一个充分条件

孙振东 夏小华
（北京航空航天大学第七研究室 北京 100083）

**摘 要** 研究一般右可逆非方非线性系统的 Morgan 问题. 在系统结构分解的框架下, 先利用一个类 Singh 算法来刻画系统本性阶与无穷零点的差集, 然后给出一个求取积分串的新算法. 如果上述差集与积分串的长度满足一个简单的不等式关系, 则可以证明, 此时 Morgan 问题一定有解, 并给出一组解耦反馈的构造方法.

**关键词** 非线性系统, Morgan 问题, 结构分解, 积分串.

## 1 引言

非线性 Morgan 问题即非线性系统的非正则静态行对行解耦问题. Freund[1]最早研究了方块系统的非线性 Morgan 问题. 文[2]研究了非方系统的 Morgan 问题, 给出当系统输入数比输出数大 1 时 Morgan 问题的解, 但该结果最近被举例指出是错误的[3]. 文[4]利用非线性交互圈的概念, 得到关于非线性 Morgan 问题的一个简单的充分条件和一个基本的必要条件.

与线性情形相比, 非线性 Morgan 问题的研究进展相当缓慢, 目前已有的结果相当少. 主要原因是我们对非线性系统的结构性质知之甚少, 特别是, 没有找到与 Morse 结构分解理论平行的结构分解算法. 虽然已经对无穷结构、本性阶等结构不变量有了较系统的研究, 但至今没有一般的算法来提取可用于补偿系统无穷结构的积分串(strings of integrators). 这就使得线性系统的一些研究思路无法推广到非线性情形.

本文对一般右可逆非方非线性系统给出一个求取积分串的算法, 然后利用它得到一般非线性系统可解耦的一个充分条件. 该条件是可验证的, 其证明是构造性的.

## 2 预备知识

所谓非线性 Morgan 问题, 是指寻找形如

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, v \in R^p \tag{1}$$

的反馈变换, 使带输出的仿射非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i = f(x) + g(x)u, x \in R^n, u \in R^m, \\ y = h(x), y \in R^p \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期 1996-07-01

解耦.

设在(2)式中,向量 $\boldsymbol{f}(x)$,$\boldsymbol{g}(x)$,$\boldsymbol{h}(x)$的分量是变元 $x$ 的亚纯函数. 假定系统(2)右可逆,且 $m>p$,即(2)式为非方系统.

对系统(2),记其无穷结构(infinite structure)为$\{n'_1,\cdots,n'_p\}$,对输出 $y_i$ 的本性阶(essential order)为 $n_{ie}$. 这两组自然数都是系统的结构常量(在正则反馈变换下保持不变),其具体定义参见文[2].

**引理 1**[2]. 系统(2)可通过正则静态解耦的充分且必要条件是

$$\{n'_i\}_p=\{n_{ie}\}_p.$$

记 $l_i=n'_1-n_{ie}, i=1,\cdots,p$. 定义系统(2)的齐次阶系统为

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0_{l_1-1}\\ h_1\\ \vdots\\ 0_{l_p-1}\\ h_p\\ f\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0_{(\sum_{i=1}^{p}l_i)\times m}\\ \\ g\end{bmatrix}u,\\ \bar{y}_i=\begin{cases}h_i, & l_i=0,\\ \bar{x}_{\sum_{k=1}^{i-1}l_k+1}, & l_i>0.\end{cases}\end{cases}\tag{3}$$

可以验证,齐次阶系统(3)的所有本性阶相等(等于 $n'_1$).

对系统(3)实施 Singh 算法(见文[5])(必要时交换输出变元的顺序),整理可得

$$\begin{cases}y_1^{(r_1)}=a_1(x)+b_1(x)u,\\ \quad\vdots\\ y_k^{(r_k)}=a_k(x,y_j^{(l)},r_j\leqslant l<r_j+r_k,j<k)+\\ \qquad b_k(x,y_j^{(l)},r_j\leqslant l<r_j+r_k-1,j<k)u,\\ \quad\vdots\\ y_p^{(r_p)}=a_p(x,y_j^{(l)},r_j\leqslant l<r_j+r_p,j<p)+\\ \qquad b_p(x,y_j^{(l)},r_j\leqslant l<r_j+r_p-1,j<p)u.\end{cases}\tag{4}$$

定义自然数集 $\Lambda=\{n_{ie}-r_i: n_{ie}-r_i>0\}$.

## 3 一个提取积分串的算法

这里我们给出一个算法,从系统能控且不能观部分提取可用来补偿无穷结构的积分串.

记矩阵 $\widetilde{B}=(b_1^{\mathrm{T}},\cdots,b_p^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. 由于系统(2)右逆,阵 $\widetilde{B}$ 行满秩. 寻找阵 $\bar{B}(x):{}_{(m-p)\times m}$使得 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\widetilde{B}\\ \bar{B}\end{pmatrix}=m$. 记 $\bar{z}^1=x, v^1=\widetilde{B}u, v^2=\bar{B}u$, 及 $\tilde{x}=(x,y_i^{(j)},i=1,\cdots,p,1\leqslant j\leqslant n)$.

第 1 步. 记 $\dot{\bar{z}}^1=\bar{A}_1(x)+\bar{B}_1(x)u$. 不妨设 $\bar{z}^1=\begin{pmatrix}z^1\\ \hat{z}^1\end{pmatrix}$使 $\dot{z}^1=A_1(x)+B_1(x)u$, $B_1$ 行满秩,且 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\widetilde{B}\\ B_1\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\widetilde{B}+\mathrm{rank}B_1=m$. 于是有

$$\dot{\hat{z}}^1 = \hat{A}_1(\widetilde{x}) + \hat{B}_1^1(\widetilde{x})v^1 + \hat{B}_1^2(\widetilde{x})\dot{z}^1.$$

令 $\widetilde{z}^1=\hat{z}^1-\hat{B}_1^2z^1$,记 $\dot{\widetilde{z}}^1=\widetilde{A}_1(\widetilde{x})+\widetilde{B}_1^1(\widetilde{x})v^1+\widetilde{B}_1^2(\widetilde{x})v^2$. 将之分解为(必要时可调换元素的顺序)$\widetilde{z}^1=\begin{bmatrix}\overline{z}^2\\ \underline{z}^2\end{bmatrix}$,使得 $\dot{\overline{z}}^2=\overline{A}_2(x)+\overline{B}_2^1(x)v^1$ 与 $v^2$ 无关.

不妨设 $\overline{z}^2=\begin{bmatrix}z^2\\ \hat{z}^2\end{bmatrix}$,使 $\dot{z}^2=A_2(x)+B_2^1(x)v^1$ 满足 $\mathrm{rank}B_2^1=\mathrm{rank}\overline{B}_2^1$ 且阵 $B_2^1$ 行满秩. 于是有 $\dot{\hat{z}}^2=\hat{A}_2(x)+\hat{B}_2^1(x)\dot{z}^2$. 令 $\widetilde{z}^2=\hat{z}^2-\hat{B}_2^1z^2$,记 $\dot{\widetilde{z}}^2=\widetilde{A}_2(x)+\widetilde{B}_2(x)u$,将之分解为(必要时可调换元素的顺序)$\widetilde{z}^2=\begin{bmatrix}\overline{z}^3\\ \underline{z}^3\end{bmatrix}$,使得 $\dot{\overline{z}}^3=A_3(x)$与 $u$ 无关. 于是$(\overline{z}^3)^{(2)}=\overline{A}_3^2(x)+\overline{B}_3(x)u$.

第 $k$ 步. 设已构造出 $z^1,\cdots,z^{2k-3},\overline{z}^1,\overline{z}^3,\cdots,\overline{z}^{2k-1}$,满足

$$(\overline{z}^{2i-1})^{(i)} = A_{2i-1}(x) + B_{2i-1}(x)u, i = 1,\cdots,k-1,$$

$$(\overline{z}^{2i-1})^{(i)} = \overline{A}_{2i-1}^i(x) + \overline{B}_{2i-1}(x)u, i = 1,\cdots,k.$$

不妨设 $\overline{z}^{2k-1}=\begin{bmatrix}z^{2k-1}\\ \hat{z}^{2k-1}\end{bmatrix}$,使$(z^{2k-1})^{(k)}=A_{2k-1}(x)+B_{2k-1}(x)u$,$B_{2k-1}$行满秩,且 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\widetilde{B}\\ B_{2k-1}\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\widetilde{B}\\ \overline{B}_{2k-1}\end{bmatrix}=\mathrm{rank}\widetilde{B}+\mathrm{rank}B_{2k-1}$. 于是有

$$(\hat{z}^{2k-1})^{(k)} = \hat{A}_{2k-1}(\widetilde{x}) + \hat{B}_{2k-1}^1(\widetilde{x})v^1 + \hat{B}_{2k-1}^2(\widetilde{x})(z^{2k-1})^{(k)}.$$

令 $\widetilde{z}^{2k-1}=\hat{z}^{2k-1}-\hat{B}_{2k-1}^2z^{2k-1}$,记$(\widetilde{z}^{2k-1})^{(k)}=\widetilde{A}_{2k-1}(\widetilde{x})+\widetilde{B}_{2k-1}^1(\widetilde{x})v^1+\widetilde{B}_{2k-1}^2(\widetilde{x})v^2$. 将之分解为(必要时可调换元素的顺序)$\widetilde{z}^{2k-1}=\begin{bmatrix}\overline{z}^{2k}\\ \underline{z}^{2k}\end{bmatrix}$,使得$(\overline{z}^{2k})^{(k)}=\overline{A}_{2k}(x)+\overline{B}_{2k}^1(x)v^1$ 与 $v^2$ 无关.

不妨设 $\overline{z}^{2k}=\begin{bmatrix}z^{2k}\\ \hat{z}^{2k}\end{bmatrix}$,使$(z^{2k})^{(k)}=A_{2k}(x)+B_{2k}^1(x)v^1$ 满足 $\mathrm{rank}B_{2k}^1=\mathrm{rank}\overline{B}_{2k}^1$且阵 $B_{2k}^1$行满秩. 于是有$(\hat{z}^{2k})^{(k)}=\hat{A}_{2k}(x)+\hat{B}_{2k}^1(x)(z^{2k})^{(k)}$. 令 $\widetilde{z}^{2k}=\hat{z}^{2k}-\hat{B}_{2k}^1z^{2k}$,记

$$(\widetilde{z}^{2k})^{(k)} = \widetilde{A}_{2k}(\widetilde{x}) + \widetilde{B}_{2k}(\widetilde{x})u,$$

将之分解为(必要时可调换元素的顺序)$\widetilde{z}^{2k}=\begin{bmatrix}\overline{z}^{2k+1}\\ \underline{z}^{2k+1}\end{bmatrix}$,使得$(\overline{z}^{2k+1})^{(k)}=A_{2k+1}(x)$与 $u$ 无关. 于是

$$(\overline{z}^{2k+1})^{(k+1)} = \overline{A}_{2k+1}^{k+1}(x) + \overline{B}_{2k+1}(x)u.$$

若 $\overline{z}^{2k+1}$空,则算法结束,否则继续第 $k+1$ 步.

**结论**. 设算法在第 $k^*$ 步结束. 记 $y^*=\begin{bmatrix}z^{2k^*-1}\\ z^{2k^*-3}\\ \vdots\\ z^1\end{bmatrix}$,对矩阵 $B^*=\begin{bmatrix}\widetilde{B}\\ B_{2k^*-1}\\ B_{2k^*-3}\\ \vdots\\ B_1\end{bmatrix}$ 自上而下选择线性无关的行向量,设得到其第 $1,\cdots,p,k_1,k_2,\cdots,k_{m-p}$行是线性无关. 令

$$\xi=\begin{pmatrix} y^*(k_1-p) \\ \vdots \\ y^*(k_{m-p}-p) \end{pmatrix},$$

其中 $y^*(k)$是指向量 $y^*$ 的第 $k$ 个元素.

对每个 $1\leqslant i\leqslant m-p$,定义自然数 $\sigma_i=\max\{k: \xi(i)\text{是 } z^k \text{ 的元素}\}$. 于是我们可以定义 $m-p$ 个积分串

$$\xi(i)^{(\sigma_i)}=a^i(x)+b^i(x)u\overset{\text{def}}{=}v_i.$$

定义自然数集 $\Theta=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_{m-p}\}$.

注. 一般地说,上述算法提取的积分串不是最大长度的. 但由该算法得到积分串的个数($m-p$ 个)是最大的,这一事实蕴含了文[4]的 Lemma4. 1.

## 4 充分条件

给定两个自然数集 $D_i=\{a_1^i,\cdots,a_{j_i}^i\},i=1,2$,称 $D_1\trianglerighteq D_2$,若存在集合 $D_1$ 的一种剖分 $D_1=\bigoplus_{i=1}^{j_2}D_{1i}$,使得

$$a_i^2\leqslant\sum_{k\in D_{1i}}k, i=1,\cdots,j_2.$$

利用上一节提供的算法,我们可以给出非线性 Morgan 问题有解的一个充分条件.

**定理 1.** 系统(2)的非线性 Morgan 问题有解的一个充分条件是

$$\Theta\trianglerighteq\Lambda. \tag{5}$$

证. 设 $S=\{i: n_{ie}>r_i\}=\{\tau_1,\cdots,\tau_l\},\tau_1<\cdots<\tau_l$ 及 $\Lambda=\{q_1,\cdots,q_l\}$. 由(5)式,不妨设存在整数 $0=j_0<j_1<j_2<\cdots<j_l=m-p$,使得

$$\sum_{k=j_{i-1}+1}^{j_i}\sigma_k\geqslant q_k, i=1,\cdots,l.$$

定义反馈 $v_k=\xi(k+1),k\notin\{j_i\}_l$. 可得到 $l$ 个积分串

$$\xi(j_{i-1}+1)^{(\sum_{k=(j_{i-1}+1)}^{j_i}\sigma_k)}=v_{j_i}, i=1,\cdots,l.$$

由于 $r_i=n_{ie},i=1,\cdots,\tau_1-1$,(4)式的前 $\tau_1$ 式形为

$$\begin{cases} y_1^{(n_{1e})}=a_1(x)+b_1(x)u, \\ \vdots \\ y_{\tau_1-1}^{(n_{(\tau_1-1)e})}=a_{\tau_1-1}(x)+b_{\tau_1-1}(x)u, \\ y_{\tau_1}^{(r_{\tau_1})}=a_{\tau_1}(x)+b_{\tau_1}(x)u. \end{cases}$$

令 $a_{\tau_1}(x)+b_{\tau_1}(x)u=\xi(1)^{(\sum_{k=1}^{j_1}\sigma_k-q_1)}$,则有

$$y_{\tau_1}^{(j)}=y_{\tau_1}^{(j)}(x),\quad j=r_{\tau_1},\cdots,n_{\tau_1e}-1,$$

及

$$y_{\tau_1}^{(n_{\tau_1e})}=v_{j_1}.$$

至此,我们有

$$\begin{cases} y_1^{(n_{1e})} = a_1(x) + b_1(x)u, \\ \vdots \\ y_{\tau_1-1}^{(n_{(\tau_1-1)e})} = a_{\tau_1-1}(x) + b_{\tau_1-1}(x)u, \\ y_{\tau_1}^{(n_{\tau_1 e})} = v_{j_1}, \\ y_{\tau_1+1}^{(n_{(\tau_1+1)e})} = a_{\tau_1+1}(x) + b_{\tau_1+1}(x)u, \\ \vdots \\ y_{\tau_2-1}^{(n_{(\tau_2-1)e})} = a_{\tau_2-1}(x) + b_{\tau_2-1}(x)u, \\ y_{\tau_2}^{(r_{\tau_2})} = a_{\tau_2}(x) + b_{\tau_2}(x)u. \end{cases}$$

令 $a_{\tau_2}(x) + b_{\tau_2}(x)u = \xi(j_1+1)^{(\sum_{k=j_1+1}^{j_2}\sigma_k - q_2)}$ ,则有

$$j_{\tau_2}^{(j)} = y_{\tau_2}^{(j)}(x), j = r_{\tau_2}, \cdots, n_{\tau_2 e} - 1,$$

及

$$y_{\tau_2}^{(n_{\tau_2 e})} = v_{j_2}.$$

如此继续下去,令 $a_{\tau_i}(x)+b_{\tau_i}(x)u=\xi(j_{i-1}+1)^{(\sum_{k=j_{i-1}+1}^{j_i}\sigma_k-q_i)}, i=3,\cdots,l$,则最后可得到

$$y_i^{(n_{ie})} = \begin{cases} a_i(x) + b_i(x)u, i \notin \{\tau_k\}, \\ v_{jk}, i = \tau_k. \end{cases}$$

由引理 1 知系统(2)可行对行解耦. 证毕.

例. 考察系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (u_1, x_3(x_8 + x_1), u_2, x_5 + x_1, x_6, x_7, u_3, u_4, x_{10}^2, u_5, u_6), \\ y_1 = x_1, y_2 = x_3, y_3 = x_4 + x_3^2. \end{cases} \tag{6}$$

对系统(6)施行齐次化的 Singh 算法,可计算出 $\Lambda=\{3,2\}$.

另一方面,利用我们的算法可提取出 3 个积分串

$$x_2^{(2)} = (x_1 + x_8)u_2 + x_3u_1 + x_3u_4 \overset{\text{def}}{=} v_1, \quad x_9^{(2)} = 2x_{10}u_5 \overset{\text{def}}{=} v_2, x_{11}^{(1)} = u_6.$$

于是 $\Theta=\{2,2,1\}$.

容易验证条件(5)成立. 因此系统(6)可通过非正则静态反馈实现解耦. 根据定理 1 的证明,可求得一个解耦反馈为

$$\begin{aligned} &u_1 = x_9, u_2 = x_2, u_3 = -6x_3^2(x_1 + x_8)^2 - 8x_2x_{11} - w_1 - 2x_3w_2 + w_3, \\ &u_4 = \frac{1}{x_3}(x_{11} - x_2(x_1 + x_8) - x_3x_9), u_5 = \frac{w_1}{2x_{10}}, u_6 = w_2. \end{aligned} \tag{7}$$

## 5 结束语

对一般右可逆非方非线性系统,本文初步讨论了系统的结构分解问题. 利用齐次化的 Singh 算法,得到系统能控且能观部分的结构分解式,由此可得到系统输入-输出的耦合信息;给出一个算法,从系统能控且不能观部分求取用于补偿系统无穷结构的积分串. 由

上述分解式中可提取两组自然数，定理 1 指出，如果这两组常数满足一简单的不等式，那么系统的非线性 Morgan 问题有解. 定理 1 的条件是可以验证的，其证明是构造性的，但所给条件一般不是必要的.

非线性 Morgan 问题是一个相当困难而复杂的问题. 本文的讨论是初步的. 进一步的工作应该改进本文所给的用于求积分串的算法，以获得更大长度的积分串. 另一方面，我们认为，要深入地研究非线性 Morgan 问题，需要寻求(有别于处理线性 Morgan 问题的)新的思路和数学工具.

## 参 考 文 献


1 Freund, E. The structure of decoupled nonlinear systems. *Int. J. Contr.*, 1975, **21**: 443—450

2 Glumineau A, Moog C H. Nonlinear Morgan's problem: case of (p+1) inputs and p outputs. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **37**: 1067—1072

3 孙振东，夏小华. 关于非线性 Morgan 问题的一点注记. 见：中国控制会议论文集，1996

4 Di Benedetto M D, Glumineau A, Moog C H. The nonlinear interactor and its application to input-output decouping. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1994, **39**: 1246—1250

5 Di Benedetto M D, Grizzle J W, Moog C H. Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. Contr. Optimiz.*, 1989, **27**: 658—672


# A SUFFICIENT CONDITION FOR NONLINEAR MORGAN'S PROBLEM


SUN ZHENDONG XIA XIAOHUA

(*7th Research Division, Beijing Univ. of Aero. and Astro., Beijing* 100083)



**Abstract** This paper is to study the so-called Morgan's problem for general nonsquare nonlinear systems. Within the framework of structural decomposition, a quasi-Singh's algorithm is utilized to characterize the gap between the essential orders and the infinite structure, and a new algorithm is offered to calculate strings of integrators. If the gap and the lengths of the strings satisfy a simple inequality, then the corresponding nonlinear Morgan's problem has at least one solution, and a decoupling feedback can be constructed.



**Key words** Nonlinear systems, Morgan's problem, structural decomposition, strings of integrators.



**孙振东** 男，1968 年生. 1990 年毕业于青岛海洋大学应用数学系，1993 年在厦门大学系统科学系获硕士学位，1996 年于北京航空航天大学第七研究室获博士学位. 目前在清华大学自动化系从事博士后研究. 感兴趣的研究领域包括非线性控制系统，混合动态系统及离散事件系统.

**夏小华** 北京航空航天大学第七研究室教授，博士生导师. 曾访问德国 Stuttgart 大学，法国 Nantes 大学以及新加坡国立大学. 主要研究方向包括非线性反馈控制，采样系统等.