第24卷 第3期
1998年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 3
May., 1998

研究简报

奇异动态经济系统最优跟踪问题[1)]

阎九喜　　程兆林

（山东建筑工程学院　济南　250014）（山东大学数学系　济南　250100）

关键词　动态经济系统，最优跟踪问题，广义系统，最优控制理论.

1　引言

线性多部门静态经济模型已有相当成熟的理论和许多成功的应用. 各种动态模型也先后被提出并进行了广泛的研究，例如众所周知的动态投入产出模型[1]

$$x(k) = Ax(k) + B(x(k+1) - x(k)) + c(k) \tag{1}$$

及具有快变与慢变生产过程的冯·纽曼模型[2]

$$x(k) + Bx(k) = A_1x(k) + A_2x(k+1) + c(k). \tag{2}$$

通常，(1)式中矩阵 $I_n - A$ 非奇异而 B 为奇异方阵；(2)式中矩阵 $I_n + B - A_1 - A_2$ 以及 $I_n + B - A_1$ 非奇异而 A_2 为奇异方阵.

模型(1)，(2)均假设经济系统是动态平衡的，即为最终消费所提供的供给总是与需求相等. 为了研究供需不平衡的效应，Mickle，Vogt 等和 Sharp，Perkins 先后提出改进的动态投入产出模型[1]. 在文献[3]中，直接取投资储备为决策变量，开始将广义系统最优控制理论应用于动态投入产出模型最优消费跟踪问题. 本文则是上述工作的深入和完善.

2　最优跟踪问题

在市场经济中生产活动的基本目的是适应市场需求. 事实上，市场需求并不仅仅限于最终消费需求，且供给与需求也常常是不平衡的. 为了引导经济系统既平稳运行又能对外部需求有良好跟踪特性，一种很自然的决策分析方法是解某个跟踪优化问题. 这类问题的一般提法可概括为

$$\min \quad J = (Ex(q) - Ex^d(q))'S(Ex(q) - Ex^d(q)) + \sum_{k=0}^{q-1}(e'(k)Q(k)e(k) + u'(k)R(k)u(k)). \tag{3}$$

约束条件为

1）山东省自然科学基金资助项目. 本文曾在1995年中国控制会议（安徽黄山）上宣读.

收稿日期 1995-12-26

$$Ex(k+1) = Fx(k) + u(k), \quad Ex(0)\text{ 给定}, \tag{4}$$

$$e(k) = d(k) - y(k), \quad y(k) = (I_n - C)x(k) - u(k). \tag{5}$$

其中 $x(k),y(k),d(k),e(k)\in R^n$ 分别表产出、供给、需求和过量需求;$u(k)\in R^n$ 为控制(决策)变量;$x^d(q)\in R^n$ 为预计末值产出;$S\geqslant 0,Q(k)>0,R(k)>0$为权矩阵;$E,F,C\in R^{n\times n}$为常阵.假定 E 为奇异阵,它相应于(1)式中的 B 或(2)式中的 A_2,I_n-C 非奇异.此外,允许系统(4)非正则[3].(4)式中初始条件按广义系统理论是合理的[4].经济上可以表资本初值或库存初值等,也很自然.同样,(3)式中末值项的形式也是合理的.

3　问题的解

求解问题(3)—(5)的困难在于系统(4)一般为非正则广义系统,而非正则广义系统一般理论尚不完善.本文采用的方法来源于文献[5].

不失一般性,假设[1]

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_1 \in R^{r\times r}, \quad 0<r<n, \tag{6}$$

其中 E_1非奇异.令

$$N = \begin{bmatrix} E_1^{-1} & -E_1^{-1}E_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \quad K = N^{-1} - F, \tag{7}$$

$$B_1 = [I_r \quad 0] \in R^{r\times n}, \quad B_2 = [0 \quad I_{n-r}] \in R^{(n-r)\times n}, \tag{8}$$

$$D = I_n - C - K, \quad G = [0 \quad B'_2]', \tag{9}$$

$$W_{11}(k) = B_1N'(D'Q(k)D + K'R(k)K)NB'_1, \tag{10}$$

$$W_{12}(k) = - B_1N'D'Q(k), \tag{11}$$

$$W_{21}(k) = (- D'Q(k)(I_n + DNG) + K'R(k)(I_n - KNG))'NB'_1, \tag{12}$$

$$W_{22}(k) = (I_n + DNG)'Q(k), \tag{13}$$

$$W_3(k) = (I_n + DNG)'Q(k)(I_n + DNG) + (I_n - KNG)'R(k)(I_n - KNG). \tag{14}$$

可以证明 $W_3(k)>0$.[3]进而,利用线性最优控制理论的经典结果,经过一些复杂推导可得问题(3)—(5)的最优控制 $u^*(k)$、最优产出 $x^*(k)$、最优供给 $y^*(k)$的表达式如下:

$$u^*(k) = (K - L(k)B_1E)x^*(k) - M(k)d(k) - R_1^{-1}(k)B'_1b(k+1), \tag{15}$$

$$x^*(k) = N\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ B_2L(k) & B_2M(k) & B_2R_1^{-1}(k)B'_1 \end{bmatrix}[h_1^{*\prime}(k) \quad d'(k) \quad b'(k+1)]', \tag{16}$$

$$y^*(k) = (D + L(k)B_1E)x^*(k) + M(k)d(k) + R_1^{-1}(k)B'_1b(k+1), \tag{17}$$

其中

$$R_1(k) = W_3(k) + B'_1P(k+1)B_1, \tag{18}$$

$$L(k) = W_3^{-1}(k)W_{21}(k) + R_1^{-1}(k)B'_1P(k+1)F_1(k), \tag{19}$$

$$M(k) = W_3^{-1}(k)W_{22}(k) + R_1^{-1}(k)B'_1P(k+1)F_2(k), \tag{20}$$

$$F_1(k) = I_r - B_1W_3^{-1}(k)W_{21}(k), \quad F_2(k) = - B_1W_3^{-1}(k)W_{22}(k), \tag{21}$$

$P(k)$满足方程

$$P(k) = F'_1(k)(I_r - P(k+1)B_1R_1^{-1}(k)B'_1)P(k+1)F_1(k) + L_1W_4(k)L'_1,$$

$$P(q) = B_1SB'_1, \tag{22}$$

$\boldsymbol{b}(k)$满足方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}(k) &= F'_1(k)(I_r - P(k+1)B_1R_1^{-1}(k)B'_1)(P(k+1)F_2(k)\boldsymbol{d}(k) + \\ &\quad \boldsymbol{b}(k+1)) + L_1W_4(k)L'_2\boldsymbol{d}(k), \\ \boldsymbol{b}(q) &= -B_1SB'_1B_1E\boldsymbol{x}^d(q),\end{aligned} \tag{23}$$

$\boldsymbol{h}_1^*(k)$满足方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_1^*(k+1) &= (I_r - B_1R_1^{-1}(k)B'_1P(k+1))(F_1(k)\boldsymbol{h}_1^*(k) + \\ &\quad F_2(k)\boldsymbol{d}(k)) - B_1R_1^{-1}(k)B'_1\boldsymbol{b}(k+1), \\ \boldsymbol{h}_1^*(0) &= B_1E\boldsymbol{x}(0),\end{aligned} \tag{24}$$

$$W_4(k) = W_1(k) - W'_2(k)W_3^{-1}(k)W_2(k), \tag{25}$$

$$L_1 = [I_r \quad 0] \in R^{r\times(n+r)}, \quad L_2 = [0 \quad I_n] \in R^{n\times(n+r)}, \tag{26}$$

$$W_1(k) = \begin{bmatrix} W_{11}(k) & W_{12}(k) \\ W'_{12}(k) & Q(k) \end{bmatrix}, \quad W_2(k) = [W_{21}(k) \quad W_{22}(k)]. \tag{27}$$

综上所述,可有以下定理.

定理1. 设矩阵$I_n - C$非奇异,并且权矩阵$Q(k)>0$,$R(k)>0$. 则奇异动态经济系统最优跟踪问题(3)—(5)是可解的. 其解的表达式如(15)—(17)式所示. 并且最优控制可综合为反馈控制律.

4 结语

利用广义系统最优控制理论研究奇异动态经济系统最优跟踪问题,得出了前向时间解和反馈控制律. 这对于实际经济过程的控制方案设计有指导意义.

所建立的经济跟踪理论事实上也提供了一种完整算法. 仿真(因篇幅所限,文中从略)表明该算法容易在计算机上实现. 此外,时变加权矩阵的引入使决策者可以灵活地比较和选择各种不同的控制策略. 这对于经济过程控制的决策分析有实用价值.

参考文献

1 Sharp J K, Perkins W R. A new approach to dynamic input-output models. *Automatica*, 1978, **14**: 77—79

2 张金水. 广义系统经济控制论. 北京:清华大学出版社, 1990

3 Yan J, Cheng Z, Zhao K, Yin H. The consumption-tracking problem of singular dynamic input-output models. In: IFAC Symposia Series. 1993, (9): 23—27

4 Bender D J, Laub A J. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems: discrete-time case. *Automatica*, 1987, **23**(1): 71—85

5 阎九喜,程兆林. 时变广义系统线性二次最优控制. 自动化学报, 1995, **21**(5): 537—544

THE OPTIMAL TRACKING PROBLEM OF SINGULAR DYNAMIC ECONOMIC SYSTEMS

YAN JIUXI
(*Shandong Architectural and Civil Engineering Inst.*, *Jinan* 250014)
CHENG ZHAOLIN
(*Dept. of Mathematics*, *Shandong University*, *Jinan* 250100)

Key words Dynamic economic system, optimal tracking problem, descriptor system, optimal control theory.