第24卷 第3期 自动化学报 Vol. 24, No. 3
1998年5月 ACTA AUTOMATICA SINICA May., 1998

研究简报

一般系统可靠性函数论

姚增起
(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

关键词 可靠性函数空间,函数基,可靠性函数标准型,函数极限,神经网络.

1 基本假设

1)系统中所有元件相互独立;

2)系统和系统中每个元件只有两种状态——正常和失效;

3)系统中每个元件可靠度相同,均为 p,不可靠度为 q,$p+q=1$.

本文对系统是否单调没有要求.

2 一般系统可靠性函数的一种统一表示

假设系统中共有 n 个元件,用 y_i 表示第 i 个元件的状态,$y_i=1$表示第 i 个元件正常,$y_i=0$ 表示第 i 个元件失效,$i=1,2,\cdots,n$. 令 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,则 Y 为系统状态. 由于 Y 的每个分量均有两个状态,所以 Y 共有2^n 个状态. 由组合数学可知,系统的 n 个元件中有 k 个正常,$n-k$ 个失效的状态个数为 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$,且有$\sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$. 记 a_k 为 C_n^k 个状态中使系统为正常的状态个数,b_k 为 C_n^k 个状态中使系统为失效的状态个数,a_k 和 b_k 均为非负整数,且满足

$$a_k+b_k=C_n^k, \tag{1}$$

则系统可靠度和不可靠度显然为

$$R(n,A,p)=\sum_{k=0}^{n}a_kp^kq^{n-k}, \tag{2}$$

$$Q(n,B,p)=\sum_{k=0}^{n}b_kp^kq^{n-k}. \tag{3}$$

其中 $A=(a_0,a_1,\cdots,a_n)$,$B=(b_0,b_1,\cdots,b_n)$,且有

$$R(n,A,p)+Q(n,B,p)=\sum_{k=0}^{n}a_kp^kq^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}b_kp^kq^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)p^kq^{n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kp^kq^{n-k}=(p+q)^n=1.$$

收稿日期 1995-12-09

我们把可靠度函数和不可靠度函数统称为可靠性函数，并统一用 $R(n,A,p)$ 表示. 在本文的假设条件下，上述的可靠性函数表示形式适用于所有系统.

3　可靠性函数空间

由式(2)和(3)可知，当参数 n 和 A 变化时，可以得到所有可靠性函数. 但式(2)和(3)只是可靠性函数的一种表示. 我们希望从更一般的角度对可靠性函数进行研究. 先给出下面的定义.

定义1. 所有符合本文假设的、元件数不多于 n 的系统可靠性函数的集合叫做系统可靠性函数空间或可靠性函数空间，记为 $\Omega(n,R)$，其中任一元素 $R(n,p)$ 满足

1) $R(n,p)$ 是一个次数不大于 n 的整系数多项式；

2) $0\leqslant R(n,p)\leqslant 1$.

设 $U=(u_0,u_1,\cdots,u_n)^T$ 为 $\Omega(n,R)$ 中的一个基，则任一可靠性函数均可表示为

$$R(n,p)=X^TU=\sum_{k=0}^{n}x_ku_k, \tag{5}$$

其中 $X=(x_0,x_1,\cdots,x_n)^T$ 为 $R(n,p)$ 在基 U 下的坐标.

若 $U=(1,p,p^2,\cdots,p^n)^T$，则得到的 $R(n,p)$ 为显多项式，所以称其为多项式基，并记为 U_D，$R(n,p)$ 在 U_D 下的坐标记为 $D=(d_0,d_1,\cdots,d_n)^T$. 若 $U=(q^n,pq^{n-1},p^2q^{n-2},\cdots,p^n)^T$，则得到的 $R(n,p)$ 如式(2)所示，称此基为标准基(与线性代数中的定义的标准基不同)，并记为 U_A. $R(n,p)$ 在 U_A 下的坐标为 $A=(a_0,a_1,\cdots,a_n)^T$，称 $R(n,p)$ 在 U_A 下的表达式为 $R(n,p)$ 的标准型，并记为 $R(n,A,p)$.

标准基与多项式基之间的坐标变换公式为

$$d_k=\sum_{i=0}^{k}a_iC_{n-i}^{k-i}(-1)^{k-i},\qquad k=0,1,\cdots,n, \tag{6}$$

$$a_k=d_k-\sum_{i=0}^{k-1}a_iC_{n-i}^{k-i}(-1)^{k-i},\quad a_0=d_0,\quad k=1,\cdots,n. \tag{7}$$

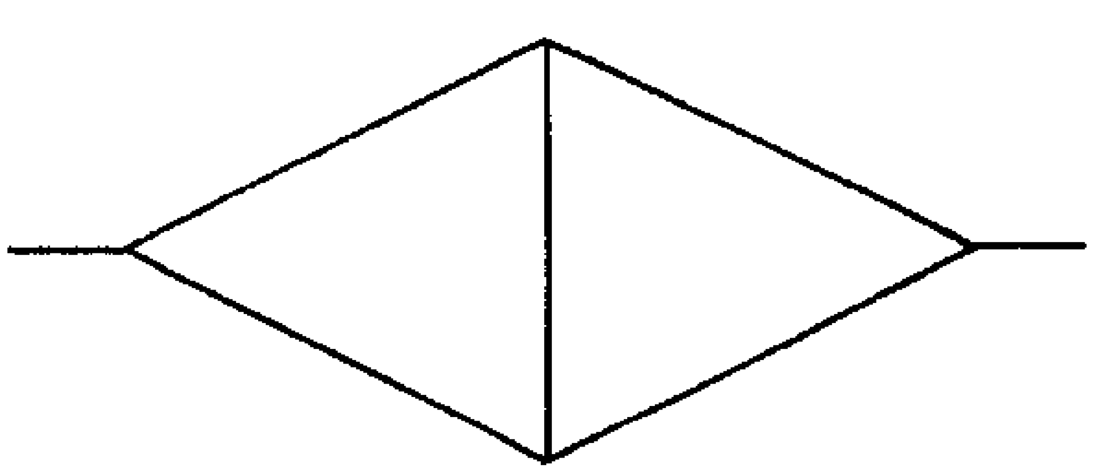

图1　桥式网络

例1. 考虑图1所示的桥式网络. 可以求出其可靠度函数为 $R(5,A,p)=2p^2q^3+8p^3q^2+5p^4q+p^5=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$. 所以有 $D=(0,0,2,2,-5,2)$，$A=(0,0,2,8,5,1)$.

4　可靠性函数标准型的极限

先考虑几个系统的可靠性函数标准型.

例2. 串联系统. $R(n,A,p)=p^n$，　$a_n=1$，　$a_k=0$，　$k=0,1,\cdots,n-1$.

例3. 并联系统. $R(n,A,p)=\sum_{k=0}^{n-1}C_n^kp^kq^{n-k}$，　$a_n=0$，　$a_k=C_n^k$，　$k=0,1,\cdots,n-1$.

例4. n 中取 m 表决系统. $R(n,A,p)=$

$$\sum_{k=m}^{n}C_n^kp^kq^{n-k},\quad a_k=0,\quad k=0,1,\cdots,m-1;\quad a_k=C_n^k,\quad k=m,m+1,\cdots,n.$$

在许多情况下，特别是在研究大型系统(如 VLSI 和神经网络)的可靠性时，需要知道当 n

很大时系统可靠性的变化趋势，也就是说，要研究极限函数$\lim\limits_{n\to\infty}R(n,A,p)$，$A$ 不同得到的极限结果也就不同.

令 $f_k=a_k/C_n^k$，由于$0\leqslant a_k\leqslant C_n^k$，且 a_k 为整数，所以$0\leqslant f_k\leqslant 1$，且 f_k 为有理分数. 当 n 很大时，为了便于分析，可以认为 f_k 为[0,1]内的实数. 显然，f_k 是 k 的函数，而且总能写成 k/n 的函数. 所以，令 $f_k=f(k/n)$，且记 $R(n,A,p)=R(n,f,p)$，于是可把 $R(n,A,p)$写成如下形式

$$R(n,f,p)=\sum_{k=0}^{n}f(k/n)C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{8}$$

式(8)也称为系统可靠性函数的第二种标准型.

伯恩斯坦在证明外尔斯特拉斯第一定理(关于函数逼近的定理)时，证明了下列极限[4]

$$\lim_{n\to\infty}R(n,f,p)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}f(k/n)C_n^k p^k q^{n-k}=f(p). \tag{9}$$

我们称式(9)为伯恩斯坦公式. 它将在系统可靠性设计中有非常重要的应用. 下面取几个典型的 $f(k/n)$，考察当 n 变化时 $R(n,f,p)$对 $f(p)$的逼近程度.

1)阶跃函数

$$f(k/n)=\begin{cases}0, & k/n<\alpha\\ 1, & k/n\geqslant\alpha\end{cases}=\begin{cases}0, & k<\alpha n,\\ 1, & k\geqslant\alpha n.\end{cases}$$

这是一个 n 中取 αn 的系统. 当有大于或等于 αn 个元件是正常时系统完全可靠. 所以系统容错能力为 $n-\alpha n=n(1-\alpha)$. 这与文[1]中用另外一种方法所证明的结果一致. $R(n,f,p)$对阶跃函数的逼近图示可参看文[1].

2)凸型函数

$$f(k/n)=\begin{cases}0, & k/n<p_1\\ 1, & p_1\leqslant k/n\leqslant p_2\\ 0, & k/n>p_2\end{cases}=\begin{cases}0, & k<np_1,\\ 1, & np_1\leqslant k\leqslant np_2,\\ 0, & k>np_2.\end{cases}$$

这是一个 n 中取 np_1到 np_2的系统. $R(n,f,p)$对凸型函数的逼近表示在图2中($p_1=0.3$，$p_2=0.6$， $n=10,20,50$).

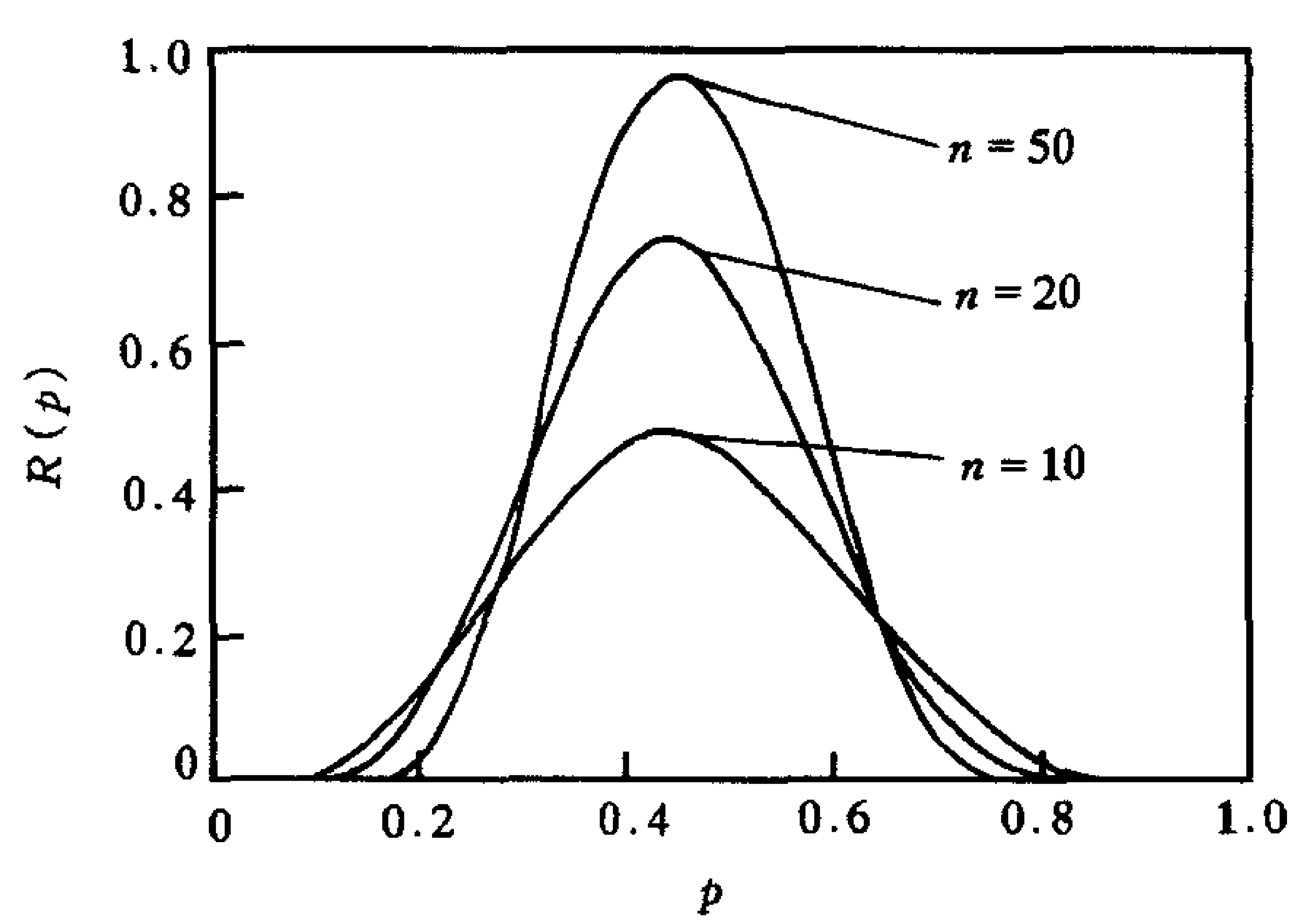

图2 $R(n,f,p)$对凸型函数的逼近

5 在人工神经网络可靠性研究中的应用

作者在文[3]中提出了多数表决的 BP 网络(关于 BP 网络的介绍，请参看文[2]). 这种网络具有较好的可靠性特性，即当元件可靠度大于某一数值后，网络可靠度可以有较大的提高. 由于篇幅所限，本文不再重复文[3]中的内容，只把一些结果列出. 我们在文[3]中共训练了三个有9个输出、18个隐节点的 BP 网络. 考虑第三个网络，$f(k/n)$如图3中的方框所示，$R(n,A,p)$如图3中的连续曲线所示. 可以看出，二者是相当接近的.

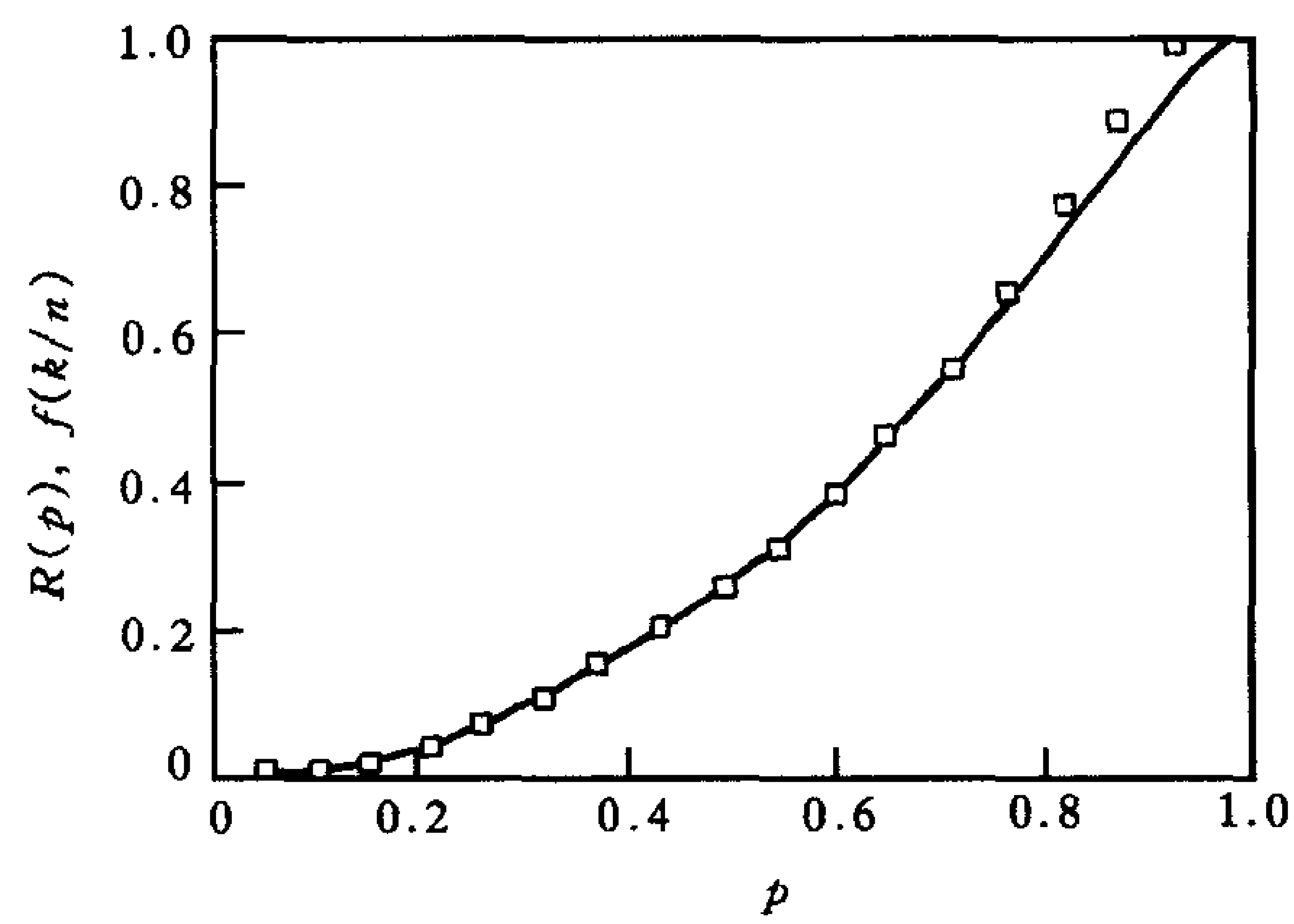

图3　一个多数表决 BP 网络的可靠度曲线与其 $f(k/n)$值

参 考 文 献

1　姚增起. 用不可靠元件构造可靠系统及其神经网络实现. 自动化学报，1990，**16**(5)：429—435

2　Lippmann R P. An introduction to computing with neural nets. *ASSP Magazine*，1987，**4**：4—22

3　Yao Zengqi. A method to increase the fault tolerance and reliability of a BP network by majority-voting. In：Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks. Beijing：1992. I542—I546

4　徐利治等. 函数逼近的理论与方法. 上海：上海科学技术出版社，1983

ON RELIABILITY FUNCTIONS OF A KIND OF SYSTEMS

YAO ZENGQI

(*Institute of Automation*，*Chinese Academy of Sciences*，*Beijing*　100080)

Key words　Reliability function space，function base，standard form of reliability functions，functional limit，neural networks.