第24卷 第3期 自 动 化 学 报 Vol. 24, No. 3
1998年5月 ACTA AUTOMATICA SINICA May., 1998

研究简报

对时域 H_∞ 插值算法误差上界的改进[1)]

王书宁
(华中理工大学系统工程研究所 武汉 430074)

关键词 H_∞辨识，鲁棒辨识，插值算法.

1 引言

文[1]将文[2]在频域构造的 H_∞ 辨识问题推广到时域，提出了直接利用时域观测数据辨识系统传递函数的插值算法，并对这类算法在最坏情况下的 H_∞ 辨识误差推导了可计算的上界，该上界比较保守，本文对其进行改进.

2 背景介绍

2.1 基本符号

l_∞表示全体形如 $x=\{x_t\}_0^\infty$ 的实数序列的集合. L_∞表示全体在单位园的边界上本质有界的可测函数的集合. H_∞为其在单位园上解析的子集. 定义

$$\|h\|_\infty = \sup_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}|h(e^{j\omega})|, \forall\ h\in L_\infty; H(M,\rho)=\{h, h\in H_\infty \mid |h(z)|\leqslant M, \forall\ |z|<\rho\};$$

$$T_N(x)=\begin{bmatrix} x_0 & & & 0 \\ x_1 & x_0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_{N-1} & x_{N-2} & \cdots & x_0 \end{bmatrix},\quad P_N(x)=\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}, \forall\ x\in l_\infty, N>0;$$

$$B_N(\varepsilon)=\{P_N(x), x\in l_\infty \mid \max_{0\leqslant t\leqslant N-1}|x_t|\leqslant\varepsilon\}.$$

2.2 时域 H_∞ 辨识问题

设被辨识系统为离散、稳定、因果、线性时不变的单变量系统. 假定：1)系统脉冲响应 $h\in l_\infty$ 构成的传递函数 $h(z)=\sum_{k=0}^{\infty}h_k z^k$ 属于 $H(M,\rho)$，其中 $M>0$和 $\rho>1$给定；2)对任意 $N>0$，能得到时域观测数据 $E_N(h,\eta)=T_N(u)P_N(h)+P_N(\eta)$，其中 $u\in l_\infty$是已知输入，$u_0\neq 0$，$\eta\in l_\infty$是观测噪声，$P_N(\eta)\in B_N(\varepsilon)$，$\varepsilon>0$给定. 要求：1)设计算法 $\varphi: R^N\to H_\infty$，使能用 $\varphi(E_N(h,\eta))$逼近 h；2)确定 φ 在最坏情况下可能产生的 H_∞ 辨识误差

1) 国家自然科学基金和国家教委博士点基金的资助.
收稿日期 1995-09-15

$$e_{N\epsilon}(\varphi)=\sup_{\substack{h\in H(M,\rho)\\ P_N(\eta)\in B_N(\epsilon)}}\|\varphi(E_N(h,\eta))-h\|_\infty$$

的上界，并分析是否成立 $\lim\limits_{\substack{N\to\infty\\ \epsilon\to 0}} e_{N\epsilon}(\varphi)=0$，满足该条件的 φ 称为收敛的算法.

2.3　插值算法及其性质

如果算法 φ^I 对任意观测数据都满足 $\varphi^I(E_N(h,\eta))\in H(M,\rho)$，　$E_N(h,\eta)-T_N(u)P_N(\varphi^I(E_N(h,\eta)))\in B_N(\epsilon)$，则称其为插值算法. 任何插值算法都具有下述近似最优性[1]

$$\inf_{\varphi\in\Phi} e_{N\epsilon}(\varphi)\leqslant e_{N\epsilon}(\varphi^I)\leqslant 2\inf_{\varphi\in\Phi} e_{N\epsilon}(\varphi),$$

其中 Φ 是所有算法的集合. 此外，还可得到适用于任一插值算法的下述不等式（见文[1]）

$\hat{e}_{N\epsilon}\leqslant e_{N\epsilon}(\varphi^I)\leqslant 2\hat{e}_{N\epsilon}$，这里　$\hat{e}_{N\epsilon}=\sup\limits_{\substack{h\in H(M,\rho)\\ T_N(u)P_N(h)\in B_N(\epsilon)}}\|h\|_\infty$.

由于这一关系，对插值算法 φ^I，一般都通过估计 $\hat{e}_{N\epsilon}$ 的上界来确定 $e_{N\epsilon}(\varphi^I)$ 的上界.

3　主要结果

定理1. $\hat{e}_{N\epsilon}\leqslant e_{N\epsilon}^{(0)}\triangleq\min\limits_{0\leqslant n\leqslant N}(\epsilon\|f_n\|_\infty+M\rho^{-n})$，其中 $f_n\in L_\infty$ 由以下二式决定：

$$W_0=(u_0)^{-1},\quad W_t=-W_0\sum_{i=0}^{t-1}W_iu_{t-i},\quad \forall\, t\geqslant 1;$$

$$f_0(z)=0,\quad f_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\Big|\sum_{t=0}^{k}(1-\rho^{2(t-k-1)})W_tz^t\Big|,\quad \forall\, n\geqslant 1.$$

该定理的证明主要利用文[3]的引理3.1，限于篇幅，此处从略.

从上述定理出发，不难得出以下两种便于计算的上界.

推论 1.　$\hat{e}_{N\epsilon}\leqslant e_{N\epsilon}^{(1)}\triangleq\min\limits_{0\leqslant n\leqslant N}\Big(\epsilon\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sum\limits_{t=0}^{k}(1-\rho^{2(t-k-1)})|W_t|+M\rho^{-n}\Big)=$

$$\epsilon\sum_{k=0}^{\hat{n}-1}\sum_{t=0}^{k}(1-\rho^{2(t-k-1)})|W_t|+M\rho^{-\hat{n}},$$

其中 $\hat{n}$ 为集合 $\{n,0\leqslant n\leqslant N-1\,|\,M(1-\rho^{-1})<\epsilon\rho^n\sum\limits_{t=0}^{n}(1-\rho^{2(t-n-1)})|W_t|\}$ 中的最小整数，如果该集合为空集，$\hat{n}=N$.

推论2. $\hat{e}_{N\epsilon}\leqslant e_{N\epsilon}^{(2)}\triangleq\min\limits_{0\leqslant n\leqslant N}(\epsilon\alpha(m)\max\limits_{0\leqslant i\leqslant mn-1}f_n(e^{j\frac{2\pi i}{mn}})+M\rho^{-n})$，其中 $\alpha(m)=(1-\frac{2\pi}{m})^{-1}$，$m$ 为大于 2π 的任意整数.

注. 推论2的推导要利用 Bernstein 不等式，可参见文[4]. 上面考虑的都是一般输入. 对于一些具体输入，推论1的上界可等于定理1的上界. 下面的推论对应于两种输入情况.

推论3. 若 u 为脉冲输入，即 $u_t=0,\forall\, t>0$；若 u 为阶跃输入，即 $u_t=u_0,\forall\, t>0$；则成立 $e_{N\epsilon}^{(0)}=e_{N\epsilon}^{(1)}$.

4　数例比较

文[1]对 $\hat{e}_{N\epsilon}$ 给出了上界 $\hat{e}_{N\epsilon}\leqslant e_{N\epsilon}^{(3)}\triangleq\epsilon\sum\limits_{k=0}^{\hat{l}}(\hat{l}+1-k)|W_k|+M\rho^{-(\hat{l}-1)}(\rho-1)^{-1}$，其中 $\hat{l}$ 为满足

$\rho^l\sum_{k=0}^{l}|W_k|<M/\varepsilon$ 的最大的 l. 利用 $\hat{n}$ 的最优性，不难验证

$$e_{N\varepsilon}^{(3)} - e_{N\varepsilon}^{(1)} \geqslant \varepsilon\sum_{k=0}^{l}\sum_{t=0}^{k}\rho^{2(t-k-1)}|W_t| + (1+\rho^{-1}(\rho-1)^{-1})M\rho^{-l} > 0.$$

表1对三种输入给出了若干不同的 ρ 与 ε 所对应的 $e_{N\varepsilon}^{(1)}$ 和 $e_{N\varepsilon}^{(3)}$ 的值，其中 $u^{(1)}$ 为单位脉冲，$u^{(2)}$ 为单位阶跃，$u^{(3)}$ 为在区间[−1,1]随机产生的一个输入序列. 从该表可以看出，$e_{N\varepsilon}^{(1)}$ 明显小于 $e_{N\varepsilon}^{(3)}$，并且 ρ 越小，ε 越大，两者差距越显著.

表1

N	M	ρ	ε	$u^{(1)}$		$u^{(2)}$		$u^{(3)}$	
				$e_{N\varepsilon}^{(1)}$	$e_{N\varepsilon}^{(3)}$	$e_{N\varepsilon}^{(1)}$	$e_{N\varepsilon}^{(3)}$	$e_{N\varepsilon}^{(1)}$	$e_{N\varepsilon}^{(3)}$
20	1	1.1	0.05	0.6788	2.7986	0.7976	3.7486	0.8784	9.1186
20	1	1.5	0.01	0.1080	0.1547	0.1726	0.2680	0.3340	0.9137
20	1	1.5	0.05	0.3424	0.5756	0.4726	0.9451	0.5955	1.8450
20	1	1.5	0.1	0.5207	0.9951	0.6358	1.5889	0.7459	2.4804
20	1	2	0.05	0.2459	0.3750	0.3430	0.6000	0.4435	1.2402

5 结束语

本文对时域 H_∞ 插值算法给出了新的可计算的辨识误差上界. 数例计算表明，该上界对现有结果有明显改进. 由于鲁棒辨识算法给出的不确定模型集的大小直接取决于上述误差上界的大小，有效地降低该误差上界，对于实际应用鲁棒控制方法显然有重要的意义.

参 考 文 献

1 Chen J, Nett C N. The Carathéodory-Fejér problem and H_∞/l_1 identification: a time domain approach, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1995, **40**(4): 729—735

2 Helmicki A J, Jacobson C A, Nett C N. Control oriented system identification: a worst-case/deterministic approach in H^∞, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1991, **36**(10): 1163—1176

3 Gu G. Suboptimal algorithms for worst case identification in H^∞ and model validation, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**(8): 1657—1661

4 Beckenbach E F, Bellman, Inequalities. Springer-Verlag, 1983

AN IMPROVEMENT ON THE ERROR BOUND FOR TIME DOMAIN H_∞ INTERPOLATORY ALGORITHMS

WANG SHUNING

(Institute of Systems Engineering, huazhong Uni. of Sci. and Tech., *Wuhan* 430074)

Key words H_∞ identification, robust identification, interpolatory algorithms.