第24卷 第3期
1998年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 3
May., 1998

研究简报

不确定离散动态系统的保成本控制[1)]

俞 立 王景成 褚 健
（浙江工业大学信息工程学院 杭州 310032） （浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027）

关键词 离散系统，不确定性，保成本控制.

1 引言

不确定系统的保成本控制问题最早由 Chang 和 Peng[1]提出. 近几年，随着不确定系统鲁棒控制研究所取得的进展，不确定系统的保成本控制问题又得到了广泛的研究，取得了很大的进展[2—4]. 然而，迄今为止，这方面的研究仅局限于连续系统. 对不确定离散系统，由于离散 Lyapunov 方程是系统状态矩阵的一个非线性方程. 当考虑系统模型不确定性时，不确定矩阵将在 Lyapunov 方程中以非线性形式出现，这使得对不确定离散系统的处理更为困难.

本文研究一类不确定离散系统的保成本控制问题，所考虑的不确定性是范数有界，且可以是时变的. 目的是设计一个状态反馈保成本控制律，不仅使得对所有允许的不确定性闭环系统是稳定的，而且，对于一个给定的二次型成本函数，闭环成本值不超过某个确定的界. 采用不确定系统的 Riccati 方程处理方法，导出了状态反馈保成本控制律存在的条件，进而将保成本控制律的设计问题转化成某个线性时不变离散系统的状态反馈 H_∞控制问题，从而应用离散系统 H_∞状态反馈控制律的设计方法得到所要的保成本控制律.

2 保成本控制

考虑由以下状态方程描述的不确定动态系统

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (A + \Delta A)\boldsymbol{x}_k + (B + \Delta B)\boldsymbol{u}_k. \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}_k \in R^n, \boldsymbol{u}_k \in R^m$ 分别是系统(1)的状态和控制向量；A, B 是适当维数的常数矩阵；$\Delta A, \Delta B$ 是适当维数的不确定矩阵，它们可以是时变的.

本文考虑的不确定性假定是范数有界的，且具有以下形式：

$$[\Delta A \quad \Delta B] = D\Delta_k[E_1 \quad E_2]. \tag{2}$$

其中 D, E_1, E_2是适当维数的常数矩阵，它们反映了不确定性的结构；$\Delta_k \in R^{i\times j}$是满足

$$\Delta_k^T \Delta_k \leqslant I \tag{3}$$

1) 浙江省自然科学基金资助项目.

收稿日期 1996-07-29

的时变不确定矩阵,式中的 I 表示适当维数的单位矩阵.

对系统(1),定义一个相应的成本函数

$$J = \sum_{k=1}^{\infty}[x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k], \tag{4}$$

其中 $Q>0, R>0$是给定的加权矩阵.

定义1. 对系统(1)和成本函数(4),若存在一个矩阵 $F\in R^{m\times n}$和一个正定对称矩阵$P\in R^{n\times n}$,使得对所有非零的 $x_k\in R^n$ 和所有满足(3)式的 Δ_k,

$$x_k^T[A + BF + D\Delta_k(E_1 + E_2F)]^T P[A + BF + D\Delta_k(E_1 + E_2F)]x_k - x_k^T P x_k + x_k^T(Q + F^T RF)x_k < 0, \tag{5}$$

则称有反馈增益矩阵 F 的控制律 $u_k=Fx_k$ 是系统(1)的具有成本矩阵 P 的保成本控制律.

保成本控制和二次镇定[5]以及和闭环成本函数值之间的关系由以下定理揭示.

定理1. 若 $u_k=Fx_k$ 是系统(1)和成本函数(4)的一个具有成本矩阵 $P>0$的保成本控制,则对所有允许的不确定性,闭环系统

$$x_{k+1} = [A + BF + D\Delta_k(E_1 + E_2F)]x_k \tag{6}$$

是二次稳定的,且相应的闭环成本函数值满足

$$J \leqslant x_0^T P x_0, \tag{7}$$

其中 $x_0\in R^n$ 是系统(1)的初始状态.

证明. 如果 $u_k=Fx_k$ 是系统(1)的一个具有成本矩阵 $P>0$的保成本控制律,定义$V(x_k)=x_k^T P x_k$,则根据定义1知:对任意非零的 $x_k\in R^n$ 和所有满足(3)式的 Δ_k,

$$\delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < - x_k^T(Q + F^T RF)x_k < 0,$$

故闭环系统(6)是二次稳定的;另一方面,从(5)式得到

$$x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k < - \delta V(x_k). \tag{8}$$

由于闭环系统(6)是稳定的,故 $x_\infty=0$,从而在(8)式两边求和,得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x_k^T Q x_k + u_k^T R x_k) \leqslant x_0^T P x_0.$$

证毕.

注. 定理1中所得到的闭环成本的界依赖于初始状态 x_0,然而,实际系统中往往不能确定系统的初始状态. 为克服这个困难,假定 x_0是一个满足 $E\{x_0x_0^T\}=I$ 的零均值随机变量,此时

$$\bar{J}=E\{J\}\leqslant E\{x_0^T P x_0\}=\mathrm{tr}(P). \tag{9}$$

3　保成本控制律的设计

定理2. 若存在矩阵 $F\in R^{m\times n}, P\in R^{n\times n}, P=P^T>0$,使得 $I-D^TPD>0$,且

$$(A + BF)^T P(A + BF) - P + (E_1 + E_2F)^T(E_1 + E_2F) + (A + BF)^T PD(I - D^T PD)^{-1}D^T P(A + BF) + Q + F^T RF < 0, \tag{10}$$

则 $u_k=Fx_k$ 是系统(1)的一个具有成本矩阵 P 的保成本控制律.

证明. 若存在矩阵 F 和 $P=P^T>0$,使得定理条件成立,则对这样的矩阵 F 和 P,以及根据 $\Delta_k^T\Delta_k\leqslant I$,

$$x_k^T[A + BF + D\Delta_k(E_1 + E_2F)]^T P[A + BF + D\Delta_k(E_1 + E_2F)]x_k = x_k^T(A + BF)^T P(A + BF)x_k + 2x_k^T(A + BF)^T PD\Delta_k(E_1 + E_2F)x_k +$$

$$x_k^T(E_1+E_2F)^T\Delta_k^T D^T PD\Delta_k(E_1+E_2F)x_k = x_k^T[(A+BF)^T P(A+BF)+(A+BF)^T PD(I-D^T PD)^{-1}D^T P(A+BF)+(E_1+E_2F)^T\Delta_k^T\Delta_k(E_1+E_2F)]x_k$$
$$-[(I-D^TPD)^{-1/2}D^TP(A+BF)x_k-(I-D^TPD)^{1/2}\Delta_k(E_1+E_2F)x_k]^T$$
$$\cdot[(I-D^TPD)^{-1/2}D^TP(A+BF)x_k-(I-D^TPD)^{1/2}\Delta_k(E_1+E_2F)x_k]\leqslant$$
$$x_k^T[(A+BF)^TP(A+BF)+(A+BF)^TPD(I-D^TPD)^{-1}D^TP(A+BF)+(E_1+E_2F)^T(E_1+E_2F)]x_k.$$

将该关系式代入(5)式,得到

$$x_k^T[A+BF+D\Delta_k(E_1+E_2F)]^TP[A+BF+D\Delta_k(E_1+E_2F)]x_k-x_k^TPx_k+x_k^T(Q+F^TRF)x_k\leqslant$$
$$x_k^T[(A+BF)^TP(A+BF)-P+(E_1+E_2F)^T(E_1+E_2F)+(A+BF)^TPD(I-D^TPD)^{-1}D^TP(A+BF)+Q+F^TRF]x_k.$$

根据条件(10)和定义1知本定理结论成立.

定义 $C=[Q^{1/2}\quad E_1^T\quad 0]^T$, $\bar{D}=[0\quad E_2^T\quad R^{1/2}]^T$,则矩阵不等式(10)可以写成

$$(A+BF)^TP(A+BF)-P+(C+\bar{D}F)^T(C+\bar{D}F)+(A+BF)^TPD(I-D^TPD)^{-1}D^TP(A+BF)<0. \tag{11}$$

根据文献[6]中的引理2.1知,存在矩阵 F 和 $P>0$,使得 $I-D^TPD>0$和(10)式,即(11)式成立当且仅当存在矩阵 F,使得$\|T_{zw}(z)\|_\infty<1$,其中 $T_{zw}(z)=(C+\bar{D}F)(zI-A-BF)^{-1}D$ 是系统

$$\begin{cases} x_{k+1}=Ax_k+Dw_k+Bu_k, \\ z_k=Cx_k+\bar{D}u_k \end{cases} \tag{12}$$

在状态反馈 $u_k=Fx_k$ 下闭环系统从 w 到 z 的传递函数. 因此,不确定系统(1)的保成本控制问题转化成为一个不含任何不确定性的线性时不变离散系统(12)的一个状态反馈 H_∞控制问题. 由于系统(12)中的矩阵 $\bar{D}$ 是满列秩的,因此满足文献[6]中的假定(A2),从而由文献[6]中的定理3.1得如下定理.

定理3. 对不确定系统(1)和成本函数(4),假定(A,B)能镇定,若存在一个对称矩阵 $P>0$,使得 $I-D^TPD>0$,且

$$A^TPA-P+Q+E_1^TE_1+A^TPD\Theta_1^{-1}D^TPA-\Theta_3^T\Theta_2^{-1}\Theta_3<0, \tag{13}$$

则

$$\dot{u}_k=-\Theta_2^{-1}\Theta_3x_k \tag{14}$$

是系统(1)和成本函数(4)具有成本矩阵 P 的一个保成本控制律. 其中

$$\Theta=I-D^TPD,\quad \Theta_2=R+E_2^TE_2+B^TPB+B^TPD\Theta_1^{-1}D^TPB,$$
$$\Theta_3=B^TPA+E_2^TE_1+B^TPD\Theta_1^{-1}D^TPA.$$

为了解矩阵不等式(13),可采用文献[6]提出的算法,即

$$\begin{cases} P_{i+1}=A^TP_iA+Q+E_1^TE_1+A^TP_iD\Theta_1^{-1}D^TP_iA-\Theta_3^T\Theta_2^{-1}\Theta_3+\varepsilon I, \\ P_0=0, \end{cases} \tag{15}$$

其中 ε 是一个很小的正数.

4 数值例子

考虑不确定离散系统(1—3)和成本函数(4),其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0.3\\ 0.5\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},$$

$$E_1=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3\\ 0.1 & 0.4\end{bmatrix},\quad E_2=\begin{bmatrix}0.3\\ 0.1\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix},\quad R=1.$$

应用算法(15),其中取 $\varepsilon=0.01$,可得满足(13)式的一个正定解矩阵

$$P=\begin{bmatrix}2.9854 & 1.1094\\ 1.1094 & 8.0366\end{bmatrix},$$

从而根据定理3和(14)式,得到不确定离散系统(1)的一个保成本控制律

$$\boldsymbol{u}_k=[-0.4109 \quad 1.7755]\boldsymbol{x}_k.$$

相应的闭环系统成本函数值的一个上界是　$E\{J\}\leqslant \mathrm{tr}(P)=11.022.$

参　考　文　献

1 Chang S S L, Peng T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1972, **AC-17**(4): 474−483

2 Kosmidou O I. Robust stability and performance of systems with structured and bounded uncertainties: an extension of the guaranteed cost control approach. *Int. J. Control*, 1990, **52**(3): 627−640

3 Bernstein D S, Haddad W M. Robust stability and performance analysis for state-space systems via quadratic Lyapunov bounds. *SIAM J. Matrix Anal.*, 1990, **11**(2): 239−271

4 Petersen I R, McFarlane D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **AC-39**(9): 1971−1977

5 Garcia G, Bernussou J, Arzelier D. Robust stabilization of discrete-time linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Syst Control Lett.*, 1994, **22**(4): 327−339

6 Furuta K, Phoojaruenchanachai S. An algebraic approach to discrete-time H_∞ control problem. In: Proc. 1990 Amer. Contr. Conf., San Diego, CA, 1990. 3068−3072

GUARANTEED COST CONTROL FOR UNCERTAIN DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS

YU LI

(*College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou* 310032)

WANG JINGCHENG　CHU JIAN

(*Institute of Industrial Control, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Key words　Discrete-time systems, uncertainties, guaranteed cost control.