第24卷 第3期
1998年5月
自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA
Vol. 24, No. 3
May., 1998

短文

广义预测控制系统性质的进一步研究[1)]

席裕庚 张 峻 吴玮琦
(上海交通大学自动化研究所 上海 200030)

摘 要 利用广义预测控制系统的内模控制结构,分析了系统的闭环性质,给出有关设计参数与闭环系统阶数之间关系的定理,从而使得通过适当选取设计参数来配置闭环系统阶数成为可能,并提供了一种基于系数空间映射的新思路研究 GPC 系统的性质.

关键词 广义预测控制,内模控制结构,阶数配置.

1 引言

近年来,广义预测控制(GPC)[1]作为模型预测控制算法的代表,在工业控制界和理论界都引起了广泛的兴趣.许多学者致力于研究其闭环特性与设计参数之间的关系[2],特别是 Clarke 等人取得了相当出色的结果[3].本文从内模控制(IMC)的结构出发,根据开闭环系统特征多项式的系数映射关系,讨论比文[3]更为一般的 GPC 系统闭环特性,给出了通过适当选取设计参数来配置闭环系统阶数的新结论.这一结论不仅可用以进一步研究系统的 deadbeat 性质和闭环稳定性,而且直接反映了闭环系统的动态特性.同时,也为设计 GPC 系统提供了一种新的思路.

2 GPC 在 IMC 下的闭环描述

对 GPC 算法这里不作介绍(可参见文[1]),仅就有关记号作一说明. GPC 采用如下 CARIMA 模型作为研究的基础

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + \xi(t)/\Delta, \Delta = 1 - q^{-1}, \tag{1}$$

其中 $\xi(t)$表示均值为零的白噪声序列, A 和 B 为 q^{-1}的多项式

$$B(q^{-1}) = m_1 + m_2q^{-1} + \cdots + m_nq^{-n+1}, \tag{2}$$

$$A(q^{-1}) = 1 + p_1q^{-1} + \cdots + p_nq^{-n}, \tag{3}$$

我们总是假定 A, B 不可约.

根据文[3], GPC 的最优控制律为

$$\Delta u(t) = \boldsymbol{d}^T(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{y}_p), \tag{4}$$

1) 国家自然科学基金资助课题.
收稿日期 1995-09-08

其中
$$d^T = (1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0)(G^TG + \lambda I)^{-1}G^T \triangleq (d_1 \quad \cdots \quad d_{N_2-N_1+1}), \tag{5}$$
y_p 是输入保持不变时的系统未来输出,G 是由阶跃响应系数$\{a_i\}$组成的动态矩阵

$$G = \begin{bmatrix} a_{N_1} & \cdots & 0 & \\ & & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ & & & \vdots \\ a_{N_2} & & \cdots & a_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}.$$

以下首先引入两个有用的引理.

引理1[4]. 设对象的 z 传递函数为
$$G_p(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})},$$
其中 A,B 分别由(2),(3)式给出,则对象阶跃响应系数$\{a_i\}$和 A,B 的系数之间满足
$$\begin{aligned}
&a_1 = m_1, \\
&(a_2 - a_1) + a_1p_1 = m_2, \\
&\qquad\vdots \\
&(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2})p_1 + \cdots + a_1p_{n-1} = m_n, \\
&(a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1})p_1 + \cdots + a_1p_n = 0, \\
&(a_{i+2} - a_{i+1}) + (a_{i+1} - a_i)p_1 + \cdots + (a_{i-n+2} - a_{i-n+1})p_n = 0, i \geqslant n.
\end{aligned}$$

引理2. 若 $\lambda=0$,G 列满秩,则顺次有下列 N_u 个等式成立
$$\begin{aligned}
&d_1a_{N_1} + \cdots + d_{N_2-N_1+1}a_{N_2} = 1, \\
&d_1a_{N_1-1} + \cdots + d_{N_2-N_1+1}a_{N_2-1} = 0, \\
&\qquad\vdots \\
&d_1a_{N_1-N_u+1} + \cdots + d_{N_2-N_1+1}a_{N_2-N_u+1} = 0, \text{其中 } a_j = 0, \forall j \leqslant 0.
\end{aligned}$$
本引理可由(5)式直接导出.

由引理1,可得到文[4]中描述的 GPC 的 IMC 结构,此时
$$G_M = \frac{z^{-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \quad G_c(z^{-1}) = \frac{d_sA(z^{-1})}{A_c(z^{-1})},$$
式中
$$d_s = \sum_{i=1}^{N_2-N_1+1} d_i, \quad A_c(z^{-1}) = 1 + p_1^*z^{-1} + \cdots + p_{n+1}^*z^{-(n+1)},$$
$A_c(z^{-1})$的系数由下式决定
$$\begin{bmatrix} 1 \\ p_1^* \\ \vdots \\ p_{n+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ b_{N_1+1} - 1 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ b_{N_1+n+1} - b_{N_1+n} & \cdots & \cdots & b_{N_1+1} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \tag{6}$$

其中 $b_i = \sum_{j=1}^{N_2-N_1+1} d_ja_{i+j-1}$.

为了分析GPC的控制性能，假设模型与对象之间无失配，并且不考虑扰动. 这样，系统的闭环传递函数为

$$G(z^{-1}) = G_c(z^{-1})G_M(z^{-1}) = \frac{d_s A(z^{-1})}{A_c(z^{-1})}\frac{z^{-1}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{d_s z^{-1}B(z^{-1})}{A_c(z^{-1})}.$$

可见GPC本质上是一种基于零极点对消的控制策略，其动态特性取决于由对象特征多项式变换而来的 $A_c(z^{-1})$，且该变换关系由设计参数唯一决定. 由此映射关系不难得到有关GPC闭环系统近似逆的性质以及最少拍控制、mean-level控制等的参数设计条件，在此不作详细讨论.

3 GPC系统的闭环阶数分析

由(6)式所描述的系数映射关系可以发现，一般情况下GPC闭环系统总比对象高一阶. 但是通过合适地选取设计参数，也可以降低GPC闭环系统的阶数. 为此先给出如下结论.

引理3. 对于 n 阶对象，若 G 列满秩且 $\lambda=0$，GPC闭环系统将为 n 阶.

证明. 因为 $\lambda=0$ 且 G 列满秩，由引理2可得

$$b_{N_1} = d_1 a_{N_1} + \cdots d_{N_2-N_1+1}a_{N_2} = 1,$$

所以 $p_{n+1}^* = (b_{N_1+n+1}-b_{N_1+n}\cdots \quad b_{N_1+1}-1)\boldsymbol{p}=$

$$(d_1\cdots d_{N_2-N_1+1})\begin{pmatrix} a_{N_1+n+1}-a_{N_1+n} & \cdots & a_{N_1+1}-a_{N_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N_2+n+1}-a_{N_2+n} & \cdots & a_{N_2+1}-a_{N_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ p_1\\ \vdots \\ p_n\end{pmatrix}.$$

利用引理1立即有 $p_{n+1}^*=0$，所以闭环系统将为 n 阶.

由以上引理，当 $\lambda=0$ 时闭环系统将会降一阶. 随之而来一个很自然的问题就是，是否可能合适地选择设计参数来进一步降低GPC闭环系统的阶数. 类似于证明引理3的方法，充分利用引理1，2和 b_i 的表达式，可有以下的定理.

定理1. 对于 n 阶对象，若 G 列满秩且 $\lambda=0$，$N_2\geqslant N_1+N_u-1$，则GPC闭环系统的阶数 n_c 由下式给出

$$n_c=\begin{cases} n-N_u+1, & 1\leqslant N_u\leqslant n, \quad N_1\geqslant N_u-1, \\ n-N_1, & 1\leqslant N_u\leqslant n, \quad 1\leqslant N_1\leqslant N_u-2, \\ 0, & N_u\geqslant n+1, \quad N_1\geqslant n, \\ n-N_1, & N_u\geqslant n+1, \quad 1\leqslant N_1\leqslant n-1. \end{cases}$$

证明. 为简便起见，仅证明第一种情况，其余类似可证.

由引理3，$p_{n+1}^*=0$. 又因为 G 列满秩且 $\lambda=0$，由引理2可知 $b_{N_1}=1$，$b_{N_1-N_u+1}=\cdots=b_{N_1-1}=0$.

1) $N_u=1$，即为引理3的情况，$n_c=n$；

2) $2\leqslant N_u\leqslant n$，$N_1\geqslant N_u-1$，对所有的 $n-N_u+2\leqslant i\leqslant n$，有 $N_1-N_u+1\leqslant N_1+i-n-1\leqslant N_1-1$，故 $b_{N_1+i-n+1}=\cdots=b_{N_1-1}=0$，则可得

$$p_i^* = \left(b_{N_1+i}-b_{N_1+i-1}\cdots 1 \quad \overbrace{0\cdots 0}^{n-i}\right)\boldsymbol{p} =$$

$$(d_1 \cdots d_{N_2-N_1+1})\begin{bmatrix} a_{N_1+i}-a_{N_1+i-1} & \cdots & a_{N_1}-a_{N_1-1} & \cdots & a_{N_1+i-n}-a_{N_1+i-n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N_2+i}-a_{N_2+i-1} & \cdots & a_{N_2}-a_{N_2-1} & \cdots & a_{N_2+i-n}-a_{N_2+i-n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}.$$

利用引理1，对于所有$n-N_u+2\leqslant i\leqslant n$，$p_i^*=0$，即 $n_c=n-N_u+1$.

在定理1的条件中，$N_2\geqslant N_1+N_u-1$是 G 列满秩的必要条件，N_2的选取并不影响闭环系统的阶数. 至此，我们已经给出了在各种 N_1，N_u 选取条件下系统的阶数，这对于系统的设计和分析是十分有意义的. 通过合适地选取系统设计参数，可以在$[0,n+1]$区间任意配置 GPC 闭环系统的阶数. 特别地，将 GPC 系统阶数配置为0，GPC 即表现为一个 deadbeat 控制器，对此已有专文讨论. 由于 DMC 的最小化控制器 $G_c(z^{-1})$具有与 GPC 相同的形式[5]，故本节的结论也适用于 DMC 系统的闭环分析.

4　仿真研究

考虑四阶对象

$$G(z^{-1})=\frac{0.3728z^{-1}+1.9069z^{-2}+1.7991z^{-3}+0.3080z^{-4}}{1+1.2496z^{-1}+0.4746z^{-2}+0.9364z^{-3}+0.7261z^{-4}},$$

因为 $n=4$，取 $\lambda=0$，$N_2=9$，则在对应于定理1各种参数选取的情况下，GPC 的闭环特征多项式 $A_c(z^{-1})$如下表所示.

表

N_1	N_u	$A_c(z^{-1})$
3	4	$1+0.967z^{-1}$
2	4	$1+1.088z^{-1}+0.1264z^{2}$
4	5	1
3	6	$1-1.0852z^{-1}$

所以，GPC 系统的降阶特性可由以上的仿真结果得到验证，仿真曲线在此略去.

5　结论

本文利用 GPC 在 IMC 结构下的描述，由开闭环特征多项式之间的系数映射关系，针对闭环系统降阶问题，给出了适当选取设计参数来达到配置闭环系统阶数的目的，从而有利于 GPC 闭环系统的设计和分析. 本文的理论证明过程中所采用的新的方法，也为进一步的研究提供了有益的思路.

参 考 文 献

1　Clarke D W，Mohtadi C，Tuffs P S. Generalized predictive control，Part 1 and 2. *Automatica*，1987，**23**：137—160

2　McIntosh A R，Shah S L，Fisher D G. Analysis and tuning of adaptive generalized predictive control. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*，1991，**69**：97—110

3 Clarke D W, Mohtadi C. Property of generalized predictive control. *Automatica*, 1989, **25**: 859—875

4 席裕庚, 厉隽怿. 广义预测控制系统的闭环分析. 控制理论与应用, 1991, **8**(4): 419—424

5 Xi Y G. Minimal form of a predictive controller based on the step-response model. *Int. J. Control*, 1989, **49**: 57—64

FURTHER STUDY ON PROPERTIES OF GPC SYSTEM

XI YUGENG ZHANG JUN WU WEIQI

(*Institute of Automation, Shanghai, Jiaotong University, Shanghai* 200030)

Abstract In this paper, by using the IMC structure of GPC, the properties of GPC closed-loop system are analyzed and the theorem about the relationship between the tuning parameters and GPC closed-loop order is derived. This theorem makes it possible to assign the closed-loop order by properly choosing the tuning parameters. It provides a new way to study the properties of GPC system based on coefficient mapping.

Key words Generalized predictive control, internal model control, order assignment.