短文

Lur'e 多非线性系统的镇定与 L_2-增益控制的 MI 方法[1)]

郭　雷　忻　欣　冯纯伯
（东南大学自动化所　南京　210018）

摘　要　考虑 Lur'e 多非线性系统的镇定与 L_2-增益控制问题. 对 Lur'e 多非线性系统表示控制对象，设计状态反馈和输出反馈控制器使闭环系统分别是绝对稳定和 L_2增益有限的. 基于矩阵不等式(MI)方法给出了镇定与 L_2-增益控制问题的可解条件，并讨论了控制器的设计方法.

关键词　Lur'e 多非线性系统，绝对稳定性，L_2增益有限性，矩阵不等式.

1　引言

非线性系统的镇定和 L_2增益控制(H^∞)问题是目前控制理论研究的一个热点[1,2]. 文献[2]针对只有一个非线性环节的 Lur'e 系统，给出输出反馈镇定问题的可解条件，该条件涉及依赖不定参数的两个耦合的 Riccati 方程；文献[1]针对只有一个非线性环节的 Lur'e 系统，提出了一个 L_2-增益控制问题可解的充分条件. 本文考虑 Lur'e 多非线性系统，基于矩阵不等式(MI)方法给出镇定与 L_2-增益控制问题的可解条件，并提出了控制器的设计方法.

被控的广义对象为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B_p\boldsymbol{p} + B_w\boldsymbol{w} + B_u\boldsymbol{u}\ ,\\ \boldsymbol{z} = C_z\boldsymbol{x} + D_{zw}\boldsymbol{w} + D_{zu}\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y} = C_y\boldsymbol{x} + D_{yw}\boldsymbol{w},\\ \boldsymbol{q} = C_q\boldsymbol{x},\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{p}^T=(p_1(t),\cdots,\ p_{n_p}(t))^T$，$p_i(t)=\phi_i(q_i(t))$，$i=1,2,\cdots,\ n_p$. 而 $\phi_i(\sigma)$满足扇区条件 $[0,1]$

$$0 \leqslant \sigma\phi_i(\sigma) \leqslant \sigma^2, \tag{2}$$

$\boldsymbol{x}\in R^n$，$\boldsymbol{w}\in R^{n_w}$，$\boldsymbol{u}\in R^{n_u}$，$\boldsymbol{y}\in R^{n_y}$，$\boldsymbol{z}\in R^{n_z}$分别表示状态，外部输入，控制，量测和被控向量. $\boldsymbol{q}\in R^{n_p}$，$\boldsymbol{p}\in R^{n_p}$分别表示 Lur'e 控制信号和控制变量.

镇定问题：设计控制器 Σ_C 使闭环 Lur'e 系统绝对稳定.

1)国家自然科学基金与中国博士后科学基金资助课题.

收稿日期　1996-06-10

L_2 增益(H^∞)控制问题：设计控制器 Σ_C 使闭环 Lur'e 系统绝对稳定且满足 $z^Tz<\gamma^2w^Tw$.

设 Σ_C 为 n_c 阶动态输出反馈控制器,其动态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_c = A_cx_c + B_cy \ , \\ u = C_cx_c + D_cy \ , \end{cases} \tag{3}$$

闭环系统为 Σ_{cl}

$$\begin{cases}\dot{x}_{cl} = A_{cl}x_{cl} + \overline{B}_pp + B_{cl}w, \\ z = C_{cl}x_{cl} + D_{cl}w, \\ q = \overline{C}_qx_{cl}, \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\begin{bmatrix} A_{cl} & B_{cl} \\ C_{cl} & D_{cl} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_w \\ \hat{C}_z & \hat{D}_{zw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_u \\ \hat{D}_{zu} \end{bmatrix} G[\hat{C}_y \quad \hat{D}_{yw}] \ , \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_w & \hat{B}_u \\ \hat{C}_z & \hat{D}_{zw} & \hat{D}_{zu} \\ \hat{C}_y & \hat{D}_{yw} & G^T \end{bmatrix} := \left[\begin{array}{cc:c:cc} A & 0 & B_w & B_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_c} \\ \hdashline C_z & 0 & D_{zw} & D_{zu} & 0 \\ \hdashline C_y & 0 & D_{yw} & D_c^T & B_c^T \\ 0 & I_{n_c} & 0 & C_c^T & A_c^T \end{array}\right] , \tag{6}$$

且 $\overline{B}_p = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}$, $\overline{C}_q = [C_q \quad 0]$.

当 $u=0$时，记 Lur'e 系统(1)为(1)$'$. (1)$'$的稳定性和 L_2增益有限性分别归结为下列形式的 Lyapunov 函数和储存(Storage)函数的存在性

$$V(x) = x^T Px + 2\sum_{i=1}^{n_p}\lambda_i\int_0^{C_{i,q}x}\phi_i(\sigma)\mathrm{d}\sigma \ . \tag{7}$$

其中 $P>0$, $\Lambda := \mathrm{diag}(\lambda_i, \cdots, \lambda_{n_p}\} \geqslant 0$, $C_q^T := (C_{1,q}^T, \cdots, C_{n_p,q}^T)$. 形如(7)的 $V(x)$的存在性等价于 Popov 判据[2].

文献[3]总结了线性矩阵不等式(LMI)的进展,下面的两个引理把 Lur'e 系统的稳定性和 L_2增益有限性归结为 LMI 的可解性. (引理1来自文献[3])

引理1(稳定条件). Lur'e 系统(1)$'$, 若存在 $P>0$, $\Lambda\geqslant 0$, $T := \mathrm{diag}\{t_1, \cdots, t_{n_p}\}\geqslant 0$ 满足

$$\begin{bmatrix} A^TP + PA & PB_p + A^T C_q^T\Lambda + C_q^TT \\ B_p^T P + \Lambda C_qA + TC_q & \Lambda C_qB_p + B_p^TC_q^T\Lambda - 2T \end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

则(1)$'$绝对稳定.

引理2 (L_2增益有限条件). 对 Lur'e 系统(1)$'$, 若存在 $P>0$, $\Lambda\geqslant 0$, $T := \mathrm{diag}\{t_1, \cdots, t_{n_p}\}\geqslant 0$ 满足

$$\begin{bmatrix} A^TP + PA + C_z^TC_z & PB_p + A^T C_q^T\Lambda + C_q^TT & PB_w + C_z^TD_{zw} \\ B_p^TP + \Lambda C_qA + TC_q & \Lambda C_qB_p + B_p^TC_q^T\Lambda - 2T & \Lambda C_qB_w \\ B_w^TP + D_{zw}^TC_z & B_w^TC_q^T\Lambda & D_{zw}^TD_{zw} - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

则(1)′L_2增益有限.

引理2与文献[3]第8.4.2节有所不同：1)此时 $D_{zw}\neq 0$；2)考虑了稳定性约束.

证明从略. 可仿照文献[3]用 S-过程(S-procedure)得到.

注1. 当 $n_p=1$时，上述两个引理中的条件分别等价于存在形如(7)式的 Lyapunov 函数和储存函数.

2 主要结果

2.1 状态反馈情形

考虑状态反馈律 $\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$,此时闭环系统状态矩阵为 $A_{cl}=A+B\backslash -uK$，代入对象(1)，并记 $Q:=P^{-1}$，$KQ=R$，应用引理1有

$$\begin{bmatrix} R^TB_u^T+QA^T+AQ+B_uR & B_p+R^TB_u^TC_q^T\Lambda+QA^TC_q^T\Lambda+QC_q^TT \\ B_p^T+\Lambda C_qAQ+\Lambda C_qB_uR+TC_qQ & \Lambda C_qB_p+B_p^TC_q^T\Lambda-2T \end{bmatrix}<0. \tag{10}$$

因而可得

定理1. 若存在 $Q(>0)$，R 满足(10)，则存在状态反馈镇定控制律 $\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$，$K=RQ^{-1}$.

下边考虑 L_2增益有限控制问题,此时(9)等价于

$$\begin{bmatrix} A^TP+PA & PB_p+A^TC_q^T\Lambda+C_q^TT & PB_w & C_z^T \\ B_p^TP+\Lambda C_qA+TC_q & \Lambda C_qB_p+B_p^TC_q^T\Lambda-2T & \Lambda C_qB_w & 0 \\ B_w^TP & B_w^TC_q^T\Lambda & -\gamma^2I & D_{zw}^T \\ C_z & 0 & D_{zw} & -I \end{bmatrix}<0, \tag{11}$$

类似地有

定理2. 若存在 $Q(>0)$，R 满足式(11)，则存在状态反馈 L_2增益有限控制律 $\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$，$K=RQ^{-1}$.

注2. (10),(11)式都是关于 Q,R,Λ 的双线性不等式(BLMI). 对 BLMI，文献[4]给出局部算法；文献[5]提出了一种全局优化算法.

2.2 输出反馈情形

将 Σ_{cl}的系数阵代入式(8),则式(8)等价于

$$\Omega+BGC+C^TG^TB^T<0, \tag{12}$$

其中

$$B:=\begin{bmatrix} P\hat{B}_u \\ \Lambda\bar{C}_q\hat{B}_u \end{bmatrix},\quad C:=\begin{bmatrix}\hat{C}_y & 0\end{bmatrix}, \tag{13a),(13b}$$

$$\Omega:=\begin{bmatrix} \hat{A}^TP+P\hat{A} & P\bar{B}_p+\hat{A}^T\bar{C}_q^T\Lambda+\bar{C}_q^TT \\ \bar{B}_p^TP+\Lambda\bar{C}_q\hat{A}+T\bar{C}_q & \Lambda\bar{C}_q\bar{B}_p+\bar{B}_p^T\bar{C}_q^T\Lambda-2T \end{bmatrix}. \tag{13c}$$

式(12)成立当且仅当下列两式成立($Q=P^{-1}$)

$$(C^T)^{\perp}\,\Omega(C^T)^{\perp^T}=\begin{bmatrix}\hat{C}_y^T \\ 0\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix} \hat{A}^TP+P\hat{A} & P\bar{B}_p+\hat{A}^T\bar{C}_q^T\Lambda+\bar{C}_q^TT \\ B_p^TP+\Lambda C_q\hat{A}+TC_q & \Lambda C_qB_p+B_p^TC_q^T\Lambda-2T \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{C}_y^T \\ 0\end{bmatrix}^{\perp^T}<0, \tag{14}$$

$$B^{\perp}\Omega(B^{\perp})^T=\begin{bmatrix}\hat{B}_u\\0\end{bmatrix}^{\perp}\begin{bmatrix}Q\hat{A}^T+\hat{A}Q & \overline{B}_p-\hat{A}^TQ\overline{C}_q^T\Lambda+Q\overline{C}_q^TT\\ B_p^T-\Lambda C_qQ\hat{A}^T+TC_qQ & -\Lambda C_qQC_q^TT-TC_qQC_q^T\Lambda-2T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{B}_u\\0\end{bmatrix}^{\perp^T}<0. \tag{15}$$

相应于(6)式的分块,取

$$P:=\begin{bmatrix}X & P_{12}\\ P_{12}^T & P_{22}\end{bmatrix},\quad Y:=(X-P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T)^{-1}, \tag{16}$$

这时 $Q=P^{-1}=\begin{bmatrix}Y & *\\ * & *\end{bmatrix}$, $X-Y^{-1}=P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T$.

把式(6),(16)代入式(14),(15),则有

$$(C^T)^{\perp}\Omega(C^T)^{\perp^T}=$$

$$\begin{bmatrix}C_y^{T\perp} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A^TX+XA & XB_p+A^TC_q^T\Lambda+C_q^TT\\ B_p^TX+\Lambda C_qA+TC_q & \Lambda C_qB_p+B_p^TC_q^T\Lambda-2T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_y^{T\perp T} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}<0, \tag{17}$$

$$B^{\perp}\Omega(B^{\perp})^T=$$

$$\begin{bmatrix}B_u^{\perp} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}YA^T+AY & B_p-A^TYC_q^T\Lambda+YC_q^TT\\ B_p^T-\Lambda C_qYA^T+TC_qY & -\Lambda C_qYC_q^TT-TC_qYC_q^T\Lambda-2T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_u^{\perp^T} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}<0 \tag{18}$$

定理3. 若存在 $X>0$, $Y>0$满足(17),(18)且$\begin{bmatrix}X & I\\ I & Y\end{bmatrix}\geqslant 0$, 则对象(1)存在输出反馈镇定控制器. 这时,镇定控制器的阶次 $n_c=\mathrm{rank}(X-Y^{-1})$.

证明. 由以上推导可知,定理3条件满足等价于对闭环系统引理1的条件满足,故闭环系统渐近稳定. 结合式(5),(6),(16)知控制器阶次等于 P_{22}的维数,即 $\mathrm{rank}(X-Y^{-1})$. 证毕.

注3. 镇定问题即 Savkin 和 Petersen[2]的"具 Lyapunov 形式的绝对镇定"问题,但文献[2]要求对象满足限制条件:(A,B_p)可控,(A,C_q)可观,且 $B_u^TC_q^TC_qB_u>0$.

同理可得

定理4. 若存在 $X>0$, $Y>0$满足

$$\left[\begin{array}{c:c}\begin{bmatrix}C_y^T\\0\\D_{yw}^T\end{bmatrix}^{\perp} & 0\\ \hdashline 0 & I\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc:c}A^TX+XA & M_1 & XB_w & C_z^T\\ M_1^T & M_2 & \Lambda C_qB_w & D_{zp}^T\\ B_w^TX & B_w^TC_q^T\Lambda & -\gamma^2I & D_{zw}^T\\ \hdashline C_z & D_{zp} & D_{zw} & -I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c}\begin{bmatrix}C_y^T\\0\\D_{yw}^T\end{bmatrix}^{\perp^T} & 0\\ \hdashline 0 & I\end{array}\right]<0, \tag{19}$$

$$\left[\begin{array}{c:c}\begin{bmatrix}B_u\\D_{zu}\\0\end{bmatrix}^{\perp} & 0\\ \hdashline 0 & I\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc:c}YA^T+AY & YC_z^T & B_w & N_1\\ C_zY & -I & D_{zw} & N_3\\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma^2I & 0\\ \hdashline N_1^T & N_3^T & 0 & N_2\end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c}\begin{bmatrix}B_u\\D_{zw}\\0\end{bmatrix}^{\perp^T} & 0\\ \hdashline 0 & I\end{array}\right]<0, \tag{20}$$

且$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geqslant 0$，其中

$$M_1 := XB_p + A^T C_q^T \Lambda + C_q^T T,$$
$$M_2 := \Lambda C_q B_p + B_p^T C_q^T \Lambda - 2T,$$
$$N_1 := B_p - A^T Y C_q^T \Lambda + Y C_q^T T,$$
$$N_2 := -\Lambda C_q Y C_q^T \Lambda + D_{zp},$$

则对象(1)L_2增益控制问题存在输出反馈控制器. 这时，控制器的阶次 $n_c = \mathrm{rank}(X - Y^{-1})$.

证明从略.

注4. 从计算的观点来看，对于待定矩阵 X, Y, Λ, T，(17)，(19)式是线性矩阵不等式(LMI)，而式(18)，(20)是多线性矩阵不等式(MLMI). 一种方法是先用内点法解出 LMI (17)或(19)，得到一组 X, Λ, T，然后再与式(18)或(20)和约束不等式联立形成另一个 LMI 求得 Y. 另一种方法是先给定参数阵 T，然后根据定理3,4求解双线性矩阵不等式(BLMI)[4,5].

3 结语

本文研究了 Lur'e 多非线性系统的镇定与 L_2-增益控制问题. 基于矩阵不等式(MI)方法给出了对 Lur'e 多非线性系统表示的控制对象. 存在状态反馈和输出反馈控制器使闭环系统分别是绝对稳定和 L_2增益有限的的可解条件，并讨论了控制器的设计方法，控制器的参数依赖于一类特殊的 BLMI 的解.

参 考 文 献

1 Zhan W, Wang L Y, Liu Y *et al*. H_∞ control for systems with sector bound nonlinearities. In: Proc. of IFAC World Congress, 1996

2 Savkin A V, Petersen I R. A method for robust stabilization related to the Popov stability criterion. *Int. J. Control*, 1995, **62**(5):1105—1115

3 Boyd S *et al*. Linear matrix inequality in system and control theory, In: SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia: 1994

4 Goh K C *et al*. Bilinear matrix inequality properties and computational methods. In: Proc. of ACC, 1994, 850—855

5 Goh K C *et al*. A global optimization approach for the BMI problem. In: Proc. of IEEE on CDC, 1994, 2009—2014

AN MI APPROACH TO STABILIZATION AND L_2-GAIN CONTROL PROBLEMS FOR LUR'E SYSTEMS

GUO LEI　XIN XIN　FENG CHUNBO

(*Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing* 210018)

Abstract Consider stabilization and L_2-gain control problems for Lur'e systems: For generalized plants described by Lur'e systems, to design state-feedback and dynamical output-feedback controllers such that the closed-loop systems are absolutely stable and L_2-gain finite, respectively. Solvable conditions are presented based on matrix inequility (MI) approach. Some feasible design algorithms are discussed.

Key words Lur'e system, absolutely stable, L_2-gain finite, matrix inequility.