

容许输入下的无纹波跟踪问题

陈晓天

(广东工业大学电子与信息工程系 广州 510643)

摘 要 研究最少拍和最少拍无纹波控制系统的一般情况,研究的基本目标是要求输入信号在某些特定类型中变化时,系统的响应无纹波并在调节时间之后无稳态误差,而且暂态过程的调节时间应尽可能的短.为改善系统的鲁棒性,还要求考虑设计非最少拍系统,这时系统的调节时间会有所延长.另外,为进一步改善系统对多种输入的灵活性,还要考虑引入惯性因子.这是对有限调节时间和系统超调的折衷,此时系统已不再是有限拍无差系统.在探讨了某些基本代数概念之后,着重论述系统在容许输入下的无纹波跟踪问题,同时使用 MATLAB 进行计算机辅助设计并给出仿真结果.

关键词 最少拍无纹波控制系统,容许输入,代数实现条件,多项式.

1 引言

目前使用数字计算机来控制物理系统的做法已经广泛地被人们所接受,与连续数据控制系统在有限时间内不可能具有零系统误差不同,数字控制系统可以在有限个采样周期后设计成零误差系统.遗憾的是,这种有限拍后的无差系统往往只是在采样点上才有意义,而在采样点之间,情况大不一样.由于被控的物理系统一般都是连续的,振荡有可能在采样点之间存在,这对不能承受过分振荡应力的机械零件尤其有害,因此要求系统在采样点间具有精确的轨迹就显得特别重要.本文所讨论的内容,将涉及在容许输入集合约束下最少拍无纹波数字控制系统的基本设计方法.

一些人对最少拍控制的许多问题进行过广泛研究, Tou, Kuo, Ogata (1987) 和 Jetto (1989) 都曾在这一领域中作出过重要贡献.最少时间状态调节问题由 Kalman 等人基本解决.有限拍输出调节问题也被 Bhattachar-yya 等人研究过.他们都从不同角度讨论了这些问题.目前令人感兴趣的是输入信号属于某些特定类型的无纹波跟踪问题.事实上,在多种工业应用场合,常常要求系统在有限拍内按照某些特定类型的输入信号复位.在这种情况下,传统的设计方法显得不是最有效,而且还可能产生一些设计上的困难.为此,有必要从另一角度探讨这一问题.为了表达严谨和叙述的方便,首先引入一些代数概念.

2 代数概念

- 1) 记 $\mathcal{F}_p(d)$ 为数域 \mathcal{F} 上变元为 $d=z^{-1}$ 的多项式环.
- 2) 如果 $a(d) \in \mathcal{F}_p(d)$, 则 $a(d)$ 中 d 的最高幂称为 $a(d)$ 的阶次, 记为 ∂a . $a(d)$ 中未

知系数的个数为 $\partial a + 1$.

3) 如果 $a(d) \in \mathcal{F}_p(d)$ 而 $a(0) = 1$, 则称 $a(d)$ 为归一多项式. 归一多项式的集合用 $\mathcal{F}_{cp}(d)$ 表示, 即

$$\mathcal{F}_{cp}(d) = \{a(d) \mid a(d) \in \mathcal{F}_p(d), a(0) = 1\},$$

$a(d)$ 中未知系数的个数为 ∂a .

4) 可分别被两个多项式 $a(d), b(d)$ 整除的多项式称为这两个多项式的最小公倍式, 记为 $[a(d), b(d)]$. 可分别被 n 个多项式 $a_1(d), a_2(d), \dots, a_i(d), (i=1, 2, \dots, n)$ 整除的多项式称为这 n 个多项式的最小公倍式, 记为 $[a_i(d)]$.

5) 记 $\mathcal{F}(d)$ 为数域 \mathcal{F} 上变元为 $d = z^{-1}$ 的有理式域.

6) 如果 $c(d) = \frac{b(d)}{a(d)} = c_n d^n + c_{n+1} d^{n+1} + \dots \in \mathcal{F}(d)$ 且 $n \geq 0$, 则称 $c(d)$ 为常态有理式, 常态有理式的集合用 $\overline{\mathcal{F}}(d)$ 表示.

7) 如果 $c(d) \in \overline{\mathcal{F}}(d)$ 且 $\{c_n\} \triangleq \{c_n, c_{n+1}, \dots\}$ 收敛于零, 则称 $c(d)$ 为稳定的常态有理式, 稳定的常态有理式的集合用 $\overline{\mathcal{F}}^+(d)$ 表示.

8) 如果 $a(d) \in \mathcal{F}_p(d)$ 且 $1/a(d) \in \overline{\mathcal{F}}^+(d)$, 则称 $a(d)$ 为稳定多项式.

9) 如果把 $a(d) \in \mathcal{F}_{cp}(d)$ 的最高幂稳定多项式因子记为 $a^+(d) \in \mathcal{F}_{cp}(d)$, 其余多项式因子记为 $a^-(d) \in \mathcal{F}_{cp}(d)$, 则有 $a(d) = a^+(d)a^-(d)$.

3 问题的阐述

最少拍无纹波数字控制系统框图如下图所示^[1,2,3]:

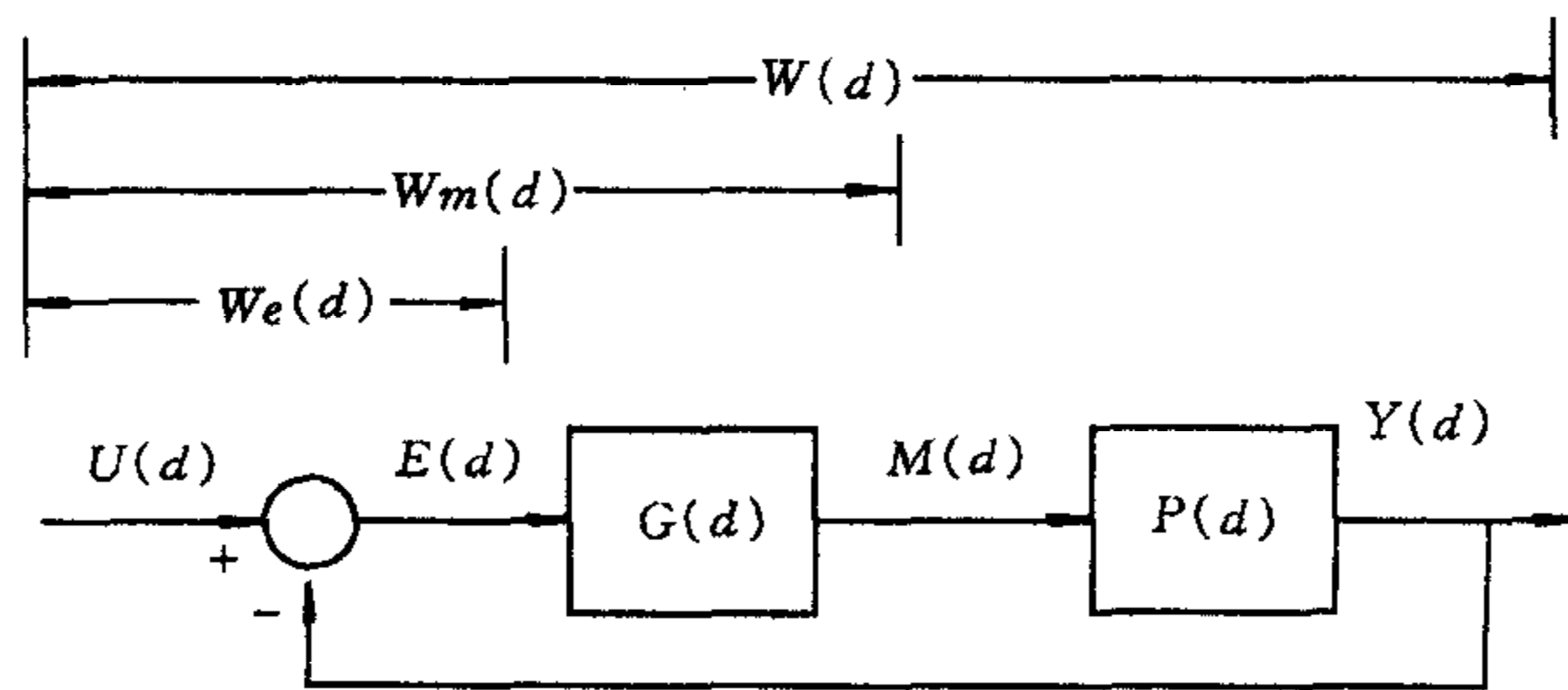


图 1 最少拍无纹波数字控制系统框图

这是一个用数字控制器 $G(d) \in \overline{\mathcal{F}}(d)$ 进行补偿的单位反馈控制系统. 其中变元 $d = z^{-1}$. 而 $U(d) \subset \overline{\mathcal{F}}(d)$ 为某些特定类型容许输入的有限集合

$$U(d) = \left\{ U_i(d) \mid U_i(d) = \frac{r_i(d)}{v_i(d)} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, \bar{i}, \quad (1)$$

这里 $r_i(d) \in \mathcal{F}_p(d), v_i(d) \in \mathcal{F}_{cp}(d)$.

$E(d), M(d), Y(d) \subset \overline{\mathcal{F}}(d)$ 分别表示误差, 控制量和输出信号的集合, 而 $W_e(d), W_m(d), W(d)$ 表示相应的误差, 控制量和闭环脉冲传递函数. $P(d) = b(d)/a(d) \in \overline{\mathcal{F}}(d), a(d) \in \mathcal{F}_{cp}(d), b(d) \in \mathcal{F}_p(d), b(0) = 0$ 为离散被控对象的脉冲传递函数. 该对象是由采样保持器(一般为零阶保持器)和连续被控对象 $P(s)$ 组成, 至少包含有一个 $d = z^{-1}$

因子^[4,5].

现要求设计一个控制器 $G(d)$, 使得系统在有限个采样周期之后, 对于集合 $U(d)$ 内每一个容许输入, 在采样点上无稳态误差, 而且连续被控对象输出不含纹波. 即期望的系统必须满足

1) 最少拍要求: 与集合 $E(d)$ 对应的所有可能的误差序列 $\{e_n^{(i)}\}$ 必须在有限拍 n_{ie} 后消失, 即 $E_i(d) \in \mathcal{F}_p(d)$ 且 $\partial E_i = n_{ie}, i = 1, 2, \dots, \bar{i}$.

2) 无纹波要求: 为了使连续被控对象输出不含纹波, 影响连续被控对象输入的所有控制量序列 $\{m_n^{(i)}\}$ 必须在有限拍后达到稳定状态, 代表自由振荡的控制量脉冲传递函数 $W_m(d) \in \mathcal{F}_p(d)$ 应为有限多项式.

4 问题的解答

根据框图, 考虑到非最小相位问题, 控制器

$$G(d) = \frac{W(d)}{W_e(d)P(d)} = \frac{1 - W_e(d)}{W_e(d)P(d)} \quad (2)$$

与被控对象 $P(d)$ 不允许出现不稳定因子相消的情况, 即误差脉冲传递函数 $W_e(d)$ 必须包含被控对象分母 $a(d)$ 中所有不稳定因子 $a^-(d)$. 再考虑到最少拍要求及被控对象至少包含有一个 $d = z^{-1}$ 因子, 设

$$W_e(d) = c(d)v(d) \in \mathcal{F}_{cp}(d), \quad (3)$$

$$\text{其中 } v(d) = [a^-(d), [v_i(d)]] = a^-(d)q(d) \in \mathcal{F}_{cp}(d). \quad (4)$$

这里 $c(d)$ 和 $q(d) \in \mathcal{F}_{cp}(d)$, 而 $c(d)$ 为归一的待定多项式. 使得误差

$$E_i(d) = U_i(d)W_e(d) \in \mathcal{F}_p(d) \quad (5)$$

为有限多项式. 再根据无纹波要求, 设

$$W_m(d) = s(d)a(d), \quad (6)$$

其中 $s(d) \in \mathcal{F}_p(d)$ 为待定多项式.

式(3), (6)两条假设确保了闭环脉冲传递函数

$$W(d) = 1 - W_e(d) = W_m(d)P(d) = s(d)b(d) \in \mathcal{F}_p(d) \quad (7)$$

为含有 $d = z^{-1}$ 因子的有限多项式.

待定多项式可通过比较系数法获得, 将式(3)代入式(7)得

$$s(d)b(d) = 1 - c(d)v(d). \quad (8)$$

这里待定多项式中未知系数个数为 $\partial c + \partial s + 1$, 由于等式两端均无常数项, 可用于比较两端同次幂系数的方程个数为 $\partial s + \partial b = \partial c + \partial v$. 获得最低阶解, 有

$$\partial s = \partial v - 1, \quad \partial c = \partial b - 1. \quad (9), (10)$$

这就是所谓的代数实现条件 ARC (Algebraic Realizability Conditions). 如果为进一步改善系统性能而增加条件, 待定多项式的阶次还可相应增加^[4,5]. 此外, 为了使该方程有解, 还必须假设 $b(d)$ 与 $v(d)$ 互质. 这样即得到物理可实现的控制器

$$G(d) = \frac{W_m(d)}{W_e(d)} = \frac{s(d)a(d)}{c(d)v(d)} = \frac{s(d)a^+(d)}{c(d)q(d)} \in \overline{\mathcal{F}}(d). \quad (11)$$

根据(1), (3), (5), (10)式, 相应的最小建立时间为

$$n_{ie} = \partial r_i - \partial v_i + \partial b - 1 + \partial v, \quad i = 1, 2, \dots, \bar{i}. \quad (12)$$

5 工程问题

最少拍无纹波的解析设计法是某些数字控制系统的设计基础^[5]. 但由于它只考虑了系统的最少拍和无纹波这样两个条件, 而且采用了稳定零极点相消的方法, 所以设计出来的系统的其它性能, 包括鲁棒性都太差, 实际上是不能直接使用的. 因此有必要进一步解决工程方面的问题, 使设计结果具备应有的工程意义. 这里指的工程问题包括实际对象相对数学模型参数有变化时, 最少拍无纹波控制应如何处理? 当系统出现工程上无法接受的控制量或超调时, 最少拍无纹波控制又应如何处理等等.

对于上述问题, 一般都可以采用牺牲系统快速性的办法加以解决, 也就是将系统设计成非最少拍系统. 办法是, 根据需要增加系统脉冲传递函数 $W_e(d)$, $W(d)$ 的阶次, 也就是在(9, 10)式的基础上增加 ∂c , ∂s . 由于每增加一个阶次会同时增加待定多项式的两个未知系数, 所以可借此增添一些需要的约束, 如为减少超调而事先将某些关键的未知系数确定为已知系数, 为减少控制量而设置控制初值 $m(0)$, $m(1)$... 等等. 虽然这时系统的调节时间加长了, 但系统的其它性能, 包括鲁棒性等都可以得到改善. 系统对参数的敏感度将随阶数的增高而降低. 当实际对象相对数学模型参数有变化时, 系统仍能保持优良性能. 但必须注意到, 性能的改善是以牺牲最少拍为代价的, 不过在上面提到的方法中, 其它性能与快速性之间折中的结果仍能保持系统为有限拍无纹波系统.

有关容许输入对超调的影响可以进行这样的定性分析. 参考 Dahlin 算法定义控制量振铃幅度的思路, 在(1), (5)式中, $W_e(d) \in \mathcal{F}_{cp}(d)$, $v_i(d) \in \mathcal{F}_{cp}(d)$, 而 $r_i(d) \in \mathcal{F}_p(d)$, 误差 $E_i(d)$ 有可能具有纯延时. 如果 $W_e(d)$ 的一次项系数越负, 扣除纯延时后的输出第一拍相对于输入就越大, 这将对系统超调产生很大影响. 因此有限多项式 $W_e(d)$ 的一次项系数在某种程度上反映了引起系统出现超调的总的水平. 根据(4)式, $v_i(d)$ 是 $W_e(d)$ 的因子, 所以当 $U_i(d) \in U(d)$, $U_j(d) \in U(d)$, $i \neq j$ 而 $v_j(d)$ 又不是其它所有 $v_i(d)$ 的因子时, $v_j(d)$ 一次项系数能在某种程度上反映出用其它输入 $U_i(d)$ 驱动系统时可能引起的超调.

要减小超调, 可尝试已提到的增加待定多项式阶次的办法. 利用增加阶次多出的自由度, 将待定多项式, 比如作为 $W_e(d)$ 因子的 $c(d)$ 的一次项系数事先确定为一个可以减小超调的数值.

如果此时仍不能满足工程上的要求, 还可进一步采用惯性因子法, 即直接给 $W_e(d)$ 在 Z 平面的右半面增加一个稳定极点. 显然这是以完全牺牲有限拍无差性质为代价的. 但换取了多种类型输入均有较满意响应的效果. 具体实现惯性因子法有各种不同的途径, 这里介绍其中一种. 这种设计方法有一个特点就是可在原设计基础上直接将超调修正到工程上可以接受的水平. 令 α 为在 Z 平面右半面所增加的稳定极点

$$W'_e(d) = \frac{W_e(d)}{1 - \alpha d}, \quad (13)$$

然后不用再求解联立方程, 可根据(2)式直接用 $W'_e(d)$ 代替 $W_e(d)$ 将整个系统设计出来.

6 数字实例

考虑数字控制系统^[1]

$$P(d) = \frac{0.399d + 0.147d^2}{(1 - 0.368d)(1 - 0.135d)}. \quad (14)$$

参考输入为

$$\{u_n^{(1)}\} = \exp(-0.2n), \quad (15)$$

和 $\{u_n^{(2)}\} = \sin(\pi/4)n, \quad (16)$

即 $U_1(d) = \frac{1}{1 - 0.819d}, \quad (17)$

和 $U_2(d) = \frac{0.707d}{1 - 1.414d + d^2}. \quad (18)$

性能指标为, *i*) 系统在调节时间之后的响应为无纹波和零误差, *ii*) 暂态响应的调节时间应尽可能地短, 设计数字控制器满足这些要求. 很明显

$$a(d) = a^+(d) = (1 - 0.368d)(1 - 0.135d), \quad (19)$$

$$a^-(d) = 1, \quad b(d) = 0.399d + 0.147d^2, \quad (20), (21)$$

$$r_1(d) = 1, \quad v_1(d) = 1 - 0.819d, \quad (22)$$

$$r_2(d) = 0.707d, \quad v_2(d) = 1 - 1.414d + d^2. \quad (23)$$

根据公式(4)

$$v(d) = q(d) = (1 - 0.819d)(1 - 1.414d + d^2), \quad (24)$$

所以

$$\partial r_1 = 0, \quad \partial v_1 = 1, \quad \partial r_2 = 1, \quad \partial v_2 = 2, \quad \partial v = 3, \quad \partial b = 2. \quad (25)$$

根据公式(9), (10)

$$\partial s = \partial v - 1 = 2, \quad \partial c = \partial b - 1 = 1. \quad (26), (27)$$

设 $s(d) = s_0 + s_1d + s_2d^2, \quad c(d) = 1 + c_1d. \quad (28), (29)$

再根据公式(8)有

$$\begin{aligned} (s_0 + s_1d + s_2d^2)(0.399d + 0.147d^2) = \\ 1 - (1 + c_1d)(1 - 0.819d)(1 - 1.414d + d^2). \end{aligned} \quad (30)$$

为比较同次幂系数并给出较多的仿真结果, 这里使用了 MATLAB 语言进行计算机辅助设计. MATLAB 语言仿真程序运行的最后结果如下:

$$s(d) = 4.6966 - 5.1296d + 2.0005d^2, \quad (31)$$

$$c(d) = 1 + 0.3591d. \quad (32)$$

最后代入公式(11)得

$$G(d) = \frac{s(d)a^+(d)}{c(d)q(d)} = \frac{4.6966 - 5.1296d + 2.0005d^2}{(1 + 0.3591d)(1 - 0.819d)(1 - 1.414d + d^2)} \cdot \frac{(1 - 0.368d)(1 - 0.135d)}{(1 - 0.368d)(1 - 0.135d)}. \quad (33)$$

由式(12)知, 最小建立时间为

$$n_{1e} = \partial r_1 - \partial v_1 + \partial b - 1 + \partial v = 3, \quad n_{2e} = \partial r_2 - \partial v_2 + \partial b - 1 + \partial v = 3 \quad (34), (35)$$

三拍之后,误差为零,这与 MATLAB 仿真程序的运行结果的确吻合.但就在这前三拍,误差

$$E_1(d) = c(d)v(d)U_1(d) = (1 + 0.3591d)(1 - 1.414d + d^2) = 1 - 1.0549d + 0.4923d^2 + 0.3591d^3. \quad (36)$$

其中第二项系数为-1.054 9,说明超调量比 100%还多,这样的系统是不能实施的,所以必须把超调压下来.根据介绍的处理工程问题的方法,增加 $s(d)$, $c(d)$ 的阶次并设关键的 $c(d)$ 一次项系数为 1,即令

$$s(d) = s_0 + s_1d + s_2d^2 + s_3d^3, \quad (37)$$

$$c(d) = 1 + d + c_2d^2 \quad (38)$$

再根据式(8)有

$$(s_0 + s_1d + s_2d^2 + s_3d^3)(0.399d + 0.147d^2) = 1 - (1 + d + c_2d^2)(1 - 0.819d)(1 - 1.414d + d^2). \quad (39)$$

仍然使用类似上面的 MATLAB 语言程序比较同次幂系数及仿真,最后结果为

$$s(d) = 3.0902 - 1.5425d - 1.4662d^2 + 1.3156d^3, \quad (40)$$

$$c(d) = 1 + d + 0.2361d^2. \quad (41)$$

代入式(11)得

$$G(d) = \frac{s(d)a^+(d)}{c(d)q(d)} = \frac{(3.0902 - 1.5425d - 1.4662d^2 + 1.3156d^3)(1 - 0.368d)(1 - 0.135d)}{(1 + d + 0.2361d^2)(1 - 0.819d)(1 - 1.414d + d^2)}. \quad (42)$$

此时误差

$$E_1(d) = c(d)v(d)U_1(d) = (1 + d + 0.2361d^2)(1 - 1.414d + d^2) = 1 - 0.414d - 0.1779d^2 + 0.6661d^3 + 0.2361d^4. \quad (43)$$

这时超调被压到 42%以下,虽然以上计算只考虑了采样点上的值,但可以证明^[1],当 $t \geq 5T$, $t \in R$ 后(T 为采样周期),连续对象的输出实际分别符合 $\exp(-0.2t)$ 和 $\sin(\pi/4)t$,实现了无纹波跟踪.

如果工程上只考虑尽量减小超调,而对调节时间之类的性能指标没有特别的要求,则可以采用惯性因子法.惯性因子法仍采用 MATLAB 语言程序仿真,为了简明起见,这里只给出 α 等于 0.1, 0.5, 0.9 之后的误差 e_1, e_2 . 最后结果如表 1

表 1

$n \backslash \alpha$	e_1			e_2		
	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9
0	1.	1.	1.	0	0	0
1	-0.314	0.086	0.486	0.707	0.707	0.707
2	-0.2093	-0.1349	0.2595	0.1987	0.4815	0.7643
3	0.6452	0.5987	0.8997	-0.3922	-0.1714	0.2758
4	0.3007	0.5355	1.0459	-0.176	-0.2224	0.1114

续表 1

n	α	e_1			e_2		
		0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9
5		0.030 1	0.267 7	0.941 3	-0.017 6	-0.111 2	0.100 3
6		0.003	0.133 9	0.847 1	-0.001 8	-0.055 6	0.090 3
7		0.000 3	0.066 9	0.762 4	-0.000 2	-0.027 8	0.081 2
8			0.033 5	0.686 2		-0.013 9	0.073 1
9			0.016 7	0.617 6		-0.007	0.065 8
10			0.008 4	0.555 8		-0.003 5	0.059 2
11			0.004 2	0.500 2		-0.001 7	0.053 3
12			0.002 1	0.450 2		-0.000 9	0.048
13			0.001	0.405 2		-0.000 4	0.043 2
14			0.000 5	0.364 7		-0.000 2	0.038 9
15			0.000 3	0.328 2		-0.000 1	0.035
16			0.000 1	0.295 4		-0.000 1	0.031 5
17			0.000 1	0.265 8			0.028 3
18				0.239 3			0.025 5
19				0.215 3			0.022 9

从仿真程序运行的最后结果可以看出, 惯性因子中极点数值越大, 动态过程越平稳, 但调节时间也相对加长. 如果需要采用惯性因子法, 余下的工作将是根据具体要求选择极点, 然后代入(13), (2)式完成设计.

7 小结

本文论证了当容许输入为特定类型时, 设计无纹波跟踪数字控制器过程中确定待定多项式的解析公式, 最少拍无纹波数字控制系统的解析设计法, 是某些数字控制系统直接数字设计的一个基础. 在这里, 数字控制器 $G(d)$ 的脉冲传递函数由公式

$$G(d) = \frac{s(d)a^+(d)}{c(d)q(d)}$$

决定, 其中参数又可通过已知输入、被控对象以及公式

$$a(d) = a^+(d)a^-(d), \quad v(d) = [a^-(d), [v_i(d)]] = a^-(d)q(d),$$

$$s(d)b(d) = 1 - c(d)v(d)$$

获得, 当 $b(d)$ 与 $v(d)$ 互质时, 其最低阶解的代数实现条件为

$$\partial s = \partial v - 1, \quad \partial c = \partial b - 1.$$

参 考 文 献

- 1 Jetto L. Ripple-free tracking problem. *Int. J. Control.* 1989, **50**:349—359
- 2 Ogata K. Discrete-Time Control System. Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1987
- 3 Wang S S, Chen B S. Simultaneous dead-bet tracking controller synthesis. *Int. J. Control.* 1986, **44**:1579
- 4 陈晓天. The Order of the Unspecified Polynomial in Ripple-free Tracking Problem, 智能控制与智能自动化. 北京: 科学出版社, 1993. 2574—2583
- 5 Chen Xiaotian, Li Zhang, Readle J C. The analytic formulas of the ripple-free tracking problem. *Automatica.* 1994, **30**(5):905—908

THE RIPPLE-FREE TRACKING PROBLEM FOR ADMISSIBLE INPUT

CHEN XIAOTIAN

(Dept. of Electronics and Information Engineering, Guangdong University of
Technology Guangdong, Guangzhou 510643)

Abstract The design of minimum settling-time and ripple-free digital control systems are investigated in this paper. The basic specifications for the system are that with a reference signal within a pre-specified class the system's response can have no ripple and no error after the settling-time, and the settling-time for the transient response must be as short as possible. To improve robustness and flexibility to input, it is necessary to design the non-minimum settling-time system and introduce a staleness-weighting factor. This is a compromise design between the limited settling-time and the overshoot. Some fundamental algebraic concepts are introduced. Then the ripple-free tracking problem for admissible input and its CAD with MATLAB are considered. Simulative examples are reported.

Key words Minimum settling-time and ripple-free digital control systems, admissible input, algebra realized condition, polynomials.

陈晓天 1945年生. 现为广东工业大学电子与信息工程系信息工程教研室副教授、主任. 1968年毕业于西安交通大学无线电工程系, 1978年考入中国科技大学无线电电子学系高校师资班学习二年, 1990年至1991年在英国 Bradford 大学电子与电气工程系作访问研究员. 目前主要研究方向为计算机控制、数值计算方法、计算机数据处理、系统仿真及数字信号处理等.