简 报

具有多个执行机构的 Lurie 控制系统的鲁棒稳定性

年晓红
(湘潭工学院自动化工程系　湘潭　411201)

关键词　区间矩阵，区间直接控制系统，区间间接控制系统，绝对稳定性. Lyapunov 函数.

1　引言

具有多个执行机构的 Lurie 型控制系统是一类非常重要的非线性控制系统，该系统的稳定性研究在非线性系统的设计中具有十分重要的意义. 近年来，国内外许多学者对具有多个执行机构的 Lurie 型控制系统的稳定性进行了广泛的研究，得到了一些很好的结果[1-4]. 八十年代以来，区间动力系统的鲁棒稳定性引起了国内外学者的广泛兴趣，但到目前为止，对非线性区间动力系统的稳定性讨论还不多见，作者在文[5]中首次讨论了高为炳院士等提出的 Lurie 型区间控制系统的鲁棒稳定性，给出了保证系统绝对稳定的若干充分条件. 本文中将讨论具有多个执行机构的 Lurie 型区间直接控制系统和 Lurie 型区间间接控制系统的绝对稳定性.

2　直接控制系统的绝对稳定性考虑直接控制系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= G[B,C]x + \sum_{j=1}^{m} G[R_j,S_j]f_j(\sigma_j)\\ \sigma_j &= c_j^{\mathrm T}x, f_j(\sigma_j)\in K_j[0,\infty]; j=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

这里 $K_j[0,\infty]=\{f_j(.)\mid f_j(0)=0, 0\le\sigma_j f_j(\sigma_j)\le+\infty\}; j=1,2,\cdots,m$. $G[B,C]=\{A\mid B\le A\le C\}$ 为 $n\times n$ 阶区间矩阵，$G[R,S]$ 为 $n\times 1$ 阶区间矩阵，$A=(a_{ij})_{n\times n}, B=(b_{ij})_{n\times n}, C=(c_{ij})_{n\times n}$ 为 $n\times n$ 阶矩阵；$R_j=(r_1^{(j)}, r_2^{(j)},\cdots r_n^{(j)})^{\mathrm T}, S_j=(s_1^{(j)}, s_2^{(j)},\cdots s_n^{(j)})^{\mathrm T}, \boldsymbol{b}^{(j)}=(b_1^{(j)}, b_2^{(j)},\cdots, b_n^{(j)})^{\mathrm T}, c_j=(c_1^{(j)}, c_2^{(j)},\cdots, c_n^{(j)})^{\mathrm T}$ 为 n 维向量.

在本文中约定：对任意阶 $m\times n$ 矩阵 $M=(m_{ij})_{m\times n}$，矩阵 $(|M|)=(|m_{ij}|)_{m\times n}$. 对任意阶 $m\times m$ 矩阵 $M=(m_{ij})_{m\times m}$，矩阵 $[|M|]=(\overline{m}_{ij})_{m\times m}$；$\overline{m}_{ij}=m_{ii}(i=j), \overline{m}_{ij}=|m_{ij}|(i\ne j)$.

对于任意的 $A\in G[B,C], \boldsymbol{b}^{(j)}\in G[R_j,S_j]$，考虑系统

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{b}^{(j)}f_j(\sigma_j), \sigma_j = c_j^{\mathrm T}x.\tag{1.2}$$

收稿日期　1996-04-01

设 $A_0=\frac{1}{2}(B+C),K=\frac{1}{2}(C-B),\boldsymbol{b}_0^{(j)}=\frac{1}{2}(R^{(j)}+S^{(j)}),K^{(j)}=\frac{1}{2}(R^{(j)}-S^{(j)})$,则该系统可化为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_0\boldsymbol{x} + \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{b}_0^{(j)}f_j(\sigma_j) + (A - A_0)\boldsymbol{x} + \sum_{j=1}^{m}(\boldsymbol{b}^{(j)} - \boldsymbol{b}_0^{(j)})\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{\sigma}_j),\boldsymbol{\sigma}_j = \boldsymbol{c}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \quad (1.3)$$

假定 A_0 稳定,则存在正定矩阵 P 满足 Lyapunov 方程 $A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0=-2I$,取 Lyapunov 函数

$$V(x,f) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Px + \sum_{j=1}^{m}\theta_i\int_0^{\sigma_i}f_i(\sigma_i)d\sigma_i.$$

经计算

$$\frac{\mathrm{d}V(x,f)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{(1.3)}=\Big[\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\dot{\boldsymbol{x}}+\sum_{i=1}^{m}\theta_i\dot{\sigma}_if_i(\sigma_i)\Big]_{(1.3)}\leq$$

$$Q-\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\sigma)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}[2I \quad -U^{\mathrm{T}}-U]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ f(\sigma)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|)\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\overline{W} & \overline{U}^{\mathrm{T}}\\ \overline{U} & \overline{Q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|)\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}-\sum_{i=1}^{m}\sigma_if_i(\sigma_i)$$

这里　$\boldsymbol{\theta}=\mathrm{diag}(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$,　$U=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_m)$,　$u_j=P\boldsymbol{b}_0^{(j)}+\frac{1}{2}\theta_jA_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_j+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}_j$,

$$Q=-\frac{1}{2}(\theta\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}\theta),\quad \boldsymbol{b}=(b_0^{(1)},b_0^{(2)},\cdots,b_0^{(n)}),\quad \boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_m);$$

$$f(\sigma)=(f_1(\sigma_1),f_2(\sigma_2),\cdots,f_m(\sigma_m))^{\mathrm{T}};$$

$\overline{W}=(|K|)^{\mathrm{T}}(|P|)+(|P|)(|K|);\overline{U}=(\bar{\boldsymbol{u}}_1,\bar{\boldsymbol{u}}_2,\cdots,\bar{\boldsymbol{u}}_m)$,

$\bar{\boldsymbol{u}}_j=(|P|)(|K^{(j)}|)+\frac{1}{2}\theta_j(|K|)^{\mathrm{T}}\cdot(|\boldsymbol{c}_j|),\overline{Q}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}(|\boldsymbol{c}|)^{\mathrm{T}}\overline{K}+\overline{K}^{\mathrm{T}}(|\boldsymbol{c}|)\theta]$,

$\overline{K}=((|K^{(1)}|),(|K^{(2)}|),\cdots,(|K^{(m)}|))$.

设 $V=\begin{bmatrix}2I & -U^{\mathrm{T}}\\ -U & Q\end{bmatrix}$,我们得到下面定理.

定理 1.　若矩阵 $\begin{bmatrix}\lambda_{\min}(V)I_n-\overline{W} & -\overline{U}^{\mathrm{T}}\\ -\overline{U} & \lambda_{\min}(V)I_m-\overline{Q}\end{bmatrix}$ 正定,则系统(1.1)绝对鲁棒稳定.

证. 由上面讨论可知

$$\frac{\mathrm{d}V(x,f)}{\mathrm{d}t)}\bigg|_{(1.3)}\leq-\lambda_{\min}(V)\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\overline{W} & \overline{U}^{\mathrm{T}}\\ \overline{U} & \overline{Q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}-\sum_{i=1}^{m}\sigma_if_i(\sigma_i)=$$

$$-\begin{bmatrix}(|x|\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\lambda_{\min}(V)I_n-\overline{W} & -\overline{U}^{\mathrm{T}}\\ -\overline{U} & \lambda_{\min}(V)I_m-\overline{Q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|)\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}-\sum_{i=1}^{m}\sigma_if_i(\sigma_i)$$

显然,若定理条件满足,则 $\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x},f)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{(1.3)}<0$,定理得证.

定理 2.　若矩阵 $\begin{bmatrix}2I_n-\overline{W} & (-(|U|)-\overline{U})^{\mathrm{T}}\\ -(|U|)-\overline{U} & [|Q|]-\overline{Q}\end{bmatrix}$ 正定,则系统(1.1)绝对稳定.

证. 由上面讨论可知

$$\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x},f)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{(1.3)}\leq-\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|)\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2I_n-\overline{W} & (-(|U|)-\overline{U})^{\mathrm{T}}\\ -(|U|)-\overline{U} & (|Q|)-\overline{Q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|)\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix},$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\sigma_i f_i(\sigma_i) < 0.$$

定理得证.

2 间接控制系统的绝对稳定性

考虑间接控制系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= G[B,C]\boldsymbol{x} + \sum_{j=1}^{m} G[R_j,S_j]f_j(\sigma_j),\\ \dot{\sigma}_j &= \boldsymbol{c}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \rho_j f_j(\sigma_j).\ f_j(\sigma_j)\in K_j[0,\infty];j=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

对于任意的 $A\in G[B,C]$,$\boldsymbol{b}^{(j)}\in G[R_j,S_j]$,考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{b}^{(j)}f_j(\sigma_j),\dot{\sigma}_j = c_j^{\mathrm{T}}x - \rho_j f_j(\sigma_j).\tag{2.2}$$

类似于§1的讨论,(2.2)可化为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= A_0\boldsymbol{x} + \sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{b}_0^{(j)}f_j(\sigma_j) + (A-A_0)\boldsymbol{x} + \sum_{j=1}^{m}(\boldsymbol{b}^{(j)}-\boldsymbol{b}_0^{(j)})f_k(\sigma_j),\\ \dot{\sigma}_j &= \boldsymbol{c}_j^{\mathrm{T}}x - \rho_j f_j(\sigma_j).\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

假定 A_0 稳定,则存在正定矩阵 P 满足 Lyapunov 方程 $A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0=-2I$,取 Lyapunov 函数

$$V(x,f) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{m}\theta_j\int_0^{\sigma_i}f_i(\sigma_i)\mathrm{d}\sigma_i.$$

经计算

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(2,3)} = \left[\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\dot{\boldsymbol{x}} + \sum_{i=1}^{m}\theta_i\dot{\sigma}_i f_i(\sigma_i)\right]_{(2.3)} \leq$$

$$-\begin{bmatrix}x\\ f(\sigma)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2I & -V^{\mathrm{T}}\\ -V & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ f(\sigma)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(|x|)\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\overline{W} & \overline{V}^{\mathrm{T}}\\ \overline{V} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(|x|)\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}.$$

这里 $\theta=\mathrm{diag}(\theta_1,\theta_2\cdots,\theta_m)$, $V=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_m)$, $\boldsymbol{v}_j=P\boldsymbol{b}_0^{(j)}+\frac{1}{2}\theta_j\boldsymbol{c}_j^{\mathrm{T}}$,

$$G = \mathrm{diag}(\theta_1\rho_1,\theta_2\rho_2,\cdots,\theta_m\rho_m),\quad f(\sigma) = (f_1(\sigma_1),f_2(\sigma_2),\cdots,f_m(\sigma_m))^{\mathrm{T}};$$

$$\overline{W} = (|K|)^{\mathrm{T}}(|P|) + (|P|)(|K|);$$

$$\overline{V} = (\bar{\boldsymbol{v}}_1,\bar{\boldsymbol{v}}_2,\cdots,\bar{\boldsymbol{v}}_m),\bar{\boldsymbol{v}}_j = (|P|)(|K^{(j)}|) + \frac{1}{2}\theta_j(|c_j|).$$

设 $H=\begin{bmatrix}2I & -V^{\mathrm{T}}\\ -V & G\end{bmatrix}$,我们得到下面定理

定理 3. 若矩阵 $\begin{bmatrix}\lambda_{\min}(H)I_n-\overline{W} & -\overline{V}^{\mathrm{T}}\\ -\overline{V} & \lambda_{\min}(H)I_m\end{bmatrix}$正定,则系统(2.1)绝对稳定.

证. 由上面讨论可知

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.3)} \leq -\lambda_{\min}(H)\begin{bmatrix}(|x|)\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}(|x|)\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|)\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\overline{W} & \overline{V}^{\mathrm{T}}\\ \overline{V} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|)\\ (|f(\sigma)|)\end{bmatrix}=$$

$$-\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|)\\(|f(\sigma)|)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\lambda_{\min}(H)I_n-\overline{W} & -\overline{V}^{\mathrm{T}}\\-\overline{V} & \lambda_{\min}(H)I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|)\\(|f(\sigma)|)\end{bmatrix}.$$

显然,若定理条件满足,则$\left.\frac{\mathrm{d}V(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.3)}<0$,定理得证.

定理 4. 若矩阵$\begin{bmatrix}2I_n-\overline{W} & [-(|V|)-\overline{V}]^{\mathrm{T}}\\-(|V|)-\overline{V} & G\end{bmatrix}$正定,则系统(2.1)绝对稳定.

证. 由上面讨论可知

$$\left.\frac{\mathrm{d}V(x,f)}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.3)}\leq-\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|)\\(|f(\sigma)|)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}2I_n-\overline{W} & [-(|V|)-\overline{V}]^{\mathrm{T}}\\-(|V|)-\overline{V} & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(|\boldsymbol{x}|)\\(|f(\sigma)|)\end{bmatrix}<0$$

定理得证.

参 考 文 献

1 赵素霞. 多个执行部件的控制系统的绝对稳定性. 中国科学,1987,**A**(8):758—792

2 赵素霞,仵永先. 绝对稳定性的频率准则. 数学学报,1995,**38**(1):6—12

3 RaPopert L B. Problem of absolute stability of control systems with several nonlinear stationary compositions. Avtomat Telemekh. , 1987,(5):66—74

4 Wu Y X,Zhao S X. Absolute stability of a control system with several nonlinear stationary elements in the case of an infinite sector. Avtomat. Telemekh,,1991,(1):34—42

5 年晓红. Lurie 型控制系统的鲁棒决定稳定性. 控制理论与应用,1995,**12**(5):641—645

ROBUST STABILITY FOR LURIE CONTROL SYSTEMS WITH SEVERAL STATIONARY COMPONENTS

NIAN XIAOHONG

(Dept. of Mathematics, Tianshui Teacher's College, Tianshui 741001)

Key words Interval matrix, interval direct control system, interval indirect control system, absolute stability, Lyapunov function.