第 24 卷 第 4 期
1998 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 4
Jul., 1998

短 文

使用多控制器结构的可靠镇定

张国山 柴天佑 顾兴源
(东北大学自动化研究中心 沈阳 110006)

摘 要 采用因子化方法研究了具有强镇定被控对象的可靠镇定问题. 证明了几种可靠镇定问题定义之间的等价关系, 并表征了可靠控制器的结构. 给出了对于任意给定的控制器, 存在另一个控制器使其共同解决可靠镇定问题的充要条件, 该条件提供了一种选择可靠控制器的方法.

关键词 可靠控制系统, 因子化方法, 可靠镇定, 强镇定, 控制器的设计.

1 引言

可靠镇定问题(RSP)是指找到两个控制器, 当它们同时控制(镇定)一个对象时, 系统保持稳定; 而当其中一个控制器出现故障后, 系统仍能保持稳定. 本文在图 1 所示的单位反馈控制系统 $S(P,C)$ 的基础上, 研究了具有被动冗余(passive redundance)的可靠控制系统 $S(P,C_1,C_2)$, 如图 2 所示. Vidyasagar 等[1-2]研究了该系统, 给出了 RSP 的两种新定义并讨论了它们之间的关系; Minto and Ravi[3]证明了 $S(P,C_1,C_2)$ 有解的充要条件是 P 是强镇定的(即存在稳定的控制器镇定 P); Gundes[4]给出了可靠控制器的设计方法及其解控制器对的参数化表示. 但是, 迄今这个问题的研究结果是不完善的, 许多问题未获解决.

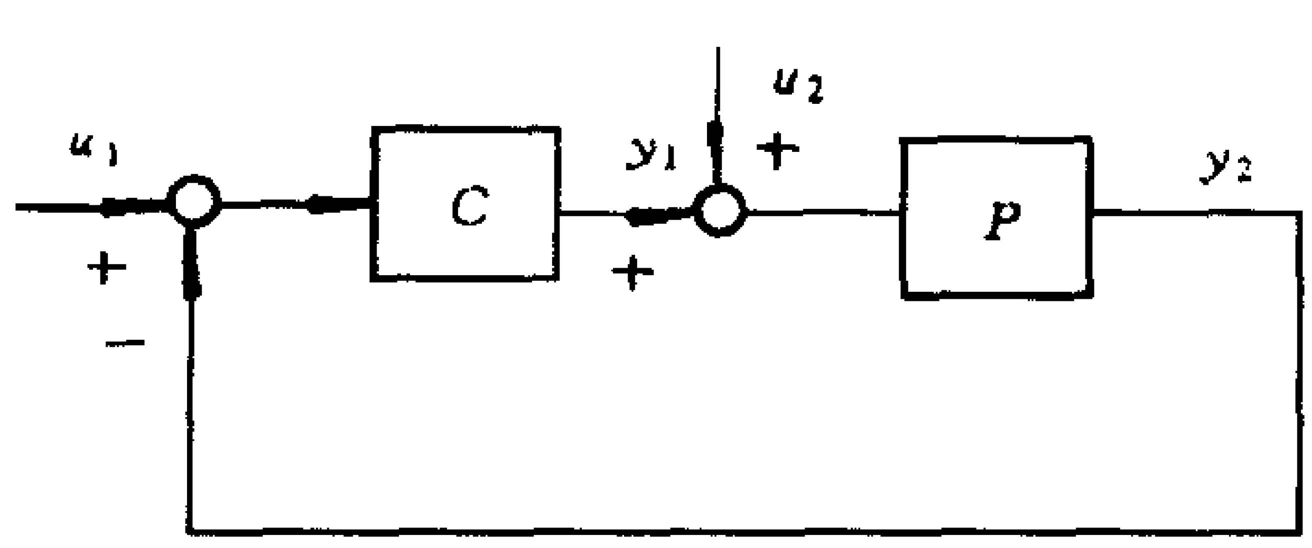

图 1 单位反馈控制系统: $S(P,C)$

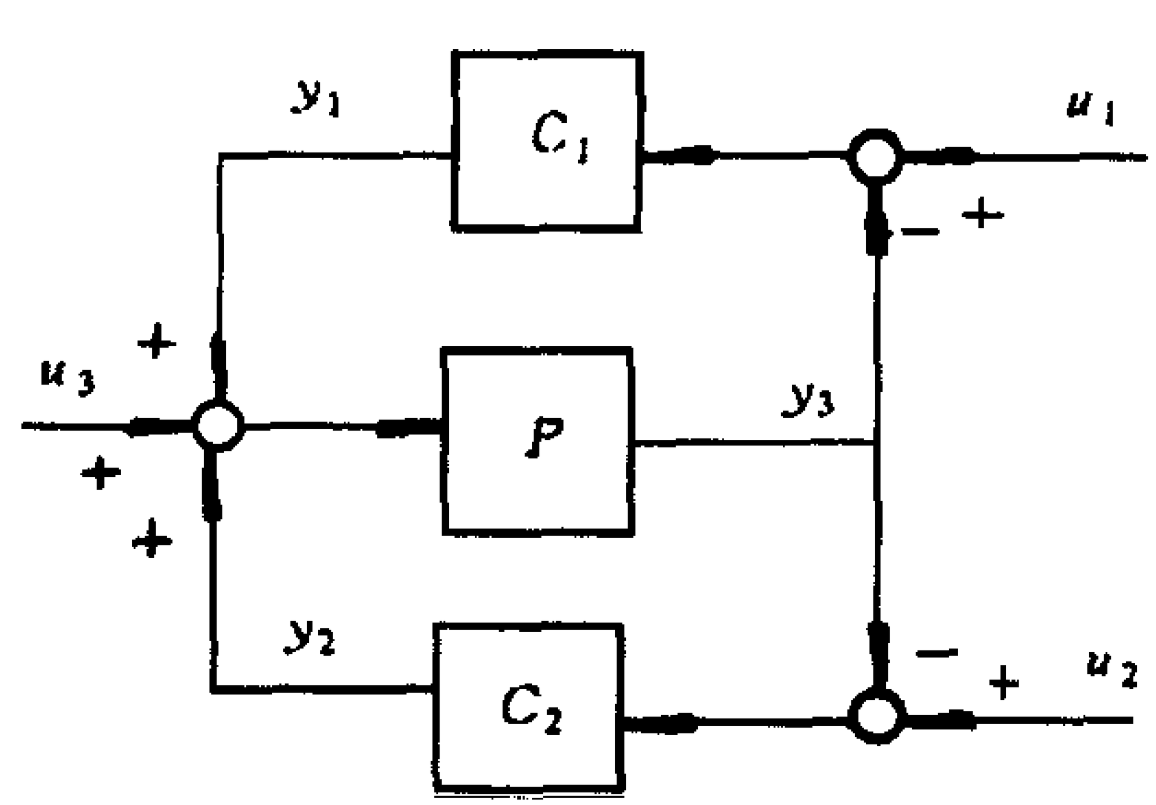

图 2 可靠控制系统: $S(P,C_1,C_2)$

本文得到如下一些结果: 证明了 Vidyasagar 提出的几种 RSP 的定义之间的等价关

1)国家自然科学基金优秀中青年专项基金资助课题.
2)张国山现工作于空军后勤学院数学教研室, 徐州 221000.
收稿日期 1995-09-29 收到修改稿日期 1997-10-6

系;给出了对任意给定的控制器 C_1,存在控制器 C_2,使得 (C_1,C_2) 共同解决 RSP 的充要条件.

2　基本知识与问题描述

设 R 为实系数有理分式的集合,S 为稳定的有理分式的集合,$M(R)$,$M(S)$ 分别表示其元素属于 R,S 的矩阵集合,$U(S)$ 表示其元素属于 S 的单模阵(unimodular matrices)的集合,即 $U(S)=\{U:U\in M(S),U^{-1}\in M(S)\}$.

设 $P\in M(R)$ 是给定的被控对象,且 $P=ND^{-1}=\tilde{D}^{-1}\tilde{N}$,这里 (N,D),$(\tilde{D},\tilde{N})\in M(S)$ 是 P 的右互质分解和左互质分解. 我们称 C 镇定 P 或 (P,C) 是稳定的,当且仅当图 1 中从 $\boldsymbol{u}=[\boldsymbol{u}'_1\boldsymbol{u}'_2]'$ 到 $\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{y}'_1\boldsymbol{y}'_2]'$ 的传递函数阵 $H_{yu}(P,C)$ 是稳定的. 设 $S(P)$ 表示所有镇定 P 的控制器 C 的集合,选择矩阵 $Y,X,\tilde{Y},\tilde{X}\in M(S)$ 且 $|Y|\neq 0$,$|\tilde{Y}|\neq 0$ 使得 $YD+XN=I$,$\tilde{D}\tilde{Y}+\tilde{N}\tilde{X}=I$. 则 $S(P)$ 能被表示为[1]

$$\begin{aligned}S(P)&=\{(Y-R\tilde{N})^{-1}(X+R\tilde{D}):|Y-R\tilde{N}|\neq 0,R\in M(S)\}\\&=\{(\tilde{X}+DQ)(\tilde{Y}-NQ)^{-1}:|\tilde{Y}-NQ|\neq 0,Q\in M(S)\}.\end{aligned}$$

由于 $(Y-R\tilde{N})^{-1}(X+R\tilde{D})=(\tilde{X}+DQ)(\tilde{Y}-NQ)^{-1}$ 当且仅当 $R=Q$,因此,为讨论方便如果 $C_i\in S(P)$,不失一般性,我们总设 $C_i=Y_i^{-1}X_i=\tilde{X}_i\tilde{Y}_i^{-1}$,这里,$Y_i=Y-R_i\tilde{N}$,$X_i=X+R_i\tilde{D}$,$\tilde{Y}_i=\tilde{Y}-NR_i$,$\tilde{X}_i=\tilde{X}+DR_i$ 与 $|Y_i|\neq 0$,$|\tilde{Y}_i|\neq 0$,则 $(Y_i,X_i,\tilde{Y}_i,\tilde{X}_i)$,$(i=1,2)$,总满足 Bezout 恒等式[1]

$$\begin{bmatrix}Y_i & X_i\\ -\tilde{N} & \tilde{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D & -\tilde{X}_i\\ N & \tilde{Y}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}. \tag{1}$$

注意(1)式左端两个矩阵交换等式仍成立,这样(1)式代表八个等式.

M. Vidyasagar 提出的几种 RSP[1,2]定义如下:

RSP 1.　对于系统 $S(P,C_1,C_2)$,找到两个控制器 C_1 与 C_2,使得 $C_1,C_2\in S(P)$,且图 2 所示可靠控制系统 $S(P,C_1,C_2)$ 是内部稳定的,即从 $\boldsymbol{u}=[\boldsymbol{u}'_1\ \boldsymbol{u}'_2\ \boldsymbol{u}'_3]'$ 到 $\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{y}'_1\ \boldsymbol{y}'_2\ \boldsymbol{y}'_3]'$ 的传递函数阵 $H_{yu}(P,C_1,C_2)$ 是稳定的.

由于 $H_{yu}(P,C_1,C_2)$ 表示式较复杂,本文不直接使用它,故略去.

RSP 2.　对于给定的对象 P,找到两个控制器 C_1 与 C_2,使得

$$\text{(i)}.\ C_1,C_2\in S(P);\quad \text{(ii)}.\ C_1+C_2\in S(P);$$

如果 $C_i=Y_i^{-1}X_i=\tilde{X}_i\tilde{Y}_i^{-i}$,且 $(Y_i,X_i,\tilde{Y}_I,\tilde{X}_i)(i=1,2)$ 满足(1)式,则

$$\text{(iii)}.\ Y_1,Y_2\ \text{右互质};\quad \text{(iv)}.\ Y_1,\ Y_2\ \text{左互质}.$$

RSP 3.　对于给定的对象 P,找到一对控制器 (C_1,C_2) 使得

$$\text{(i)}.\ C_1\in S(P);\quad \text{(ii)}.\ C_2\in S(P)\cap S(P_1),\text{这里 } P_1=P(I+C_1P)^{-1}.$$

RSP 2 中前三个条件由文献[2]给出,本文增加了最后一个条件(iv);文献[2]中 RSP3 被称为修改的可靠镇定问题;文献[3]证明 RSP1 有解的充分必要条件为 P 是强镇定的;文献[4]进一步给出 RSP1 的解控制器对 (C_1,C_2) 的设计方法及参数化表示.

3　主要结果

引理 1. 设 $C_1,C_2\in S(P)$ 满足(1)式,且设

$$Y_3:=(Y_1^{-1}+Y_2^{-1}-D)^{-1},\qquad X_3:=Y_3(Y_1^{-1}X_1+Y_2^{-1}X_2),\tag{2}$$

则 $C_1+C_2\in S(P)$ 充分必要条件是 $Y_3,X_3\in M(S)$.

证明．必要性.因为 $C_1+C_2\in S(P)$,则一定存在 $\overline{Y}_3,\overline{X}_3\in M(S)$,使得 $\overline{Y}_3^{-1}\overline{X}_3=Y_1^{-1}X_1+Y_2^{-1}X_2$ 且 $\overline{Y}_3D+\overline{X}_3N=I$;因此 $\overline{Y}_3^{-1}=D+\overline{Y}_3^{-1}\overline{X}_3N=D+(Y_1^{-1}X_1+Y_2^{-1}X_2)N=(Y_1^{-1}+Y_2^{-1}-D)$,从(2)式得 $\overline{Y}_3=Y_3,\overline{X}_3=X_3$.

充分性.容易验证 $Y_3D+X_3N=I$,再由 $Y_3,X_3\in M(S)$ 得 $Y_3^{-1}X_3\in S(P)$,即 $C_1+C_2\in S(P)$.□

引理1对于后面的研究极其有意义.为讨论方便,设 $\Delta_{21}:=Y_1+Y_2-Y_2DY_1$,$\Delta_{12}:=Y_1+Y_2-Y_1DY_2$.则由(2)式得 $Y_3=Y_2\Delta_{12}^{-1}Y_1=Y_1\Delta_{21}^{-1}Y_2$.

引理2. 设 $C_1,C_2\in S(P)$ 满足(1)式,再设 $P_1=P(I+C_1P)^{-1}$.则 $C_2\in S(P_1)$ 的充分必要条件是 $\Delta_{21}\in U(S)$,即

$$Y_1+Y_2-Y_2DY_1\in U(S).\tag{3}$$

证明．从(1)式,有 $P_1=NY_1$,则 $C_2\in S(P_1)$ 的充分必要条件是 $Y_2+X_2NY_1=Y_1+Y_2-Y_2DY_1\in U(S)$.□

比较RSP3与引理2知,RSP3有解的充要条件是(3)式成立.

引理3[4]. 设 $C_1,C_2\in S(P)$ 满足(1)式,则 (C_1,C_2) 是RSP1的解的充分必要条件是 $\Delta_{21}\in U(S)$,或 $\Delta_{12}\in U(S)$.

定理1. 几种可靠镇定问题:RSP1,RSP2,RSP3是等价的,即他们同时有解或无解,且解集相等.

证明．引入集合 $S_i(P):=\{(C_1,C_2)\mid C_j\in S(P),j=1,2.$ 且 (C_1,C_2) 是 $\mathrm{RSP}(i)$ 的解$\}$,$i=1,2,3$.则只需证明 $S_1(P)=S_2(P)=S_3(P)$.

设 C_1,C_2 满足(1)式,首先注意到无论 (C_1,C_2) 属于任意 $S_i(P)$,皆有 $C_1,C_2,C_1+C_2\in S(P)$.从引理2与引理3容易得,$(C_1,C_2)\in S_1(P)$ 等价于 $(C_1,C_2)\in S_3(P)$,且都等价于(3)式成立.因此也得 Y_1 与 Y_2 左互质而且右互质,即 $(C_1,C_2)\in S_2(P)$.下面只需证明 $S_2(P)\subseteq S_1(P)$.对于 $(C_1,C_2)\in S_2(P)$,由引理1知,$Y_3\in M(S)$ 且 $Y_1+Y_2-Y_2DY_1=Y_2Y_3^{-1}Y_1\in M(S)$,这时可以分解 Y_3 为 Y_1 的左因子与 Y_2 的右因子的积.不失一般性,设 $Y_3=Y_{11}Y_{22}$,$Y_2=F_lY_{22}$ 及 $Y_1=Y_{11}F_r$,这里 $Y_{11},Y_{22},F_l,F_r\in M(S)$ 皆为非奇异方阵,则有

$$Y_{11}F_r+F_lY_{22}-F_lY_{22}DY_{11}F_r=F_lF_r.\tag{4}$$

注意(4)式的两边皆等于 $Y_1+Y_2-Y_2DY_1$.从(4)式知 F_l 是 $Y_{11}F_r=Y_1$ 的左因子,因此 F_l 是 Y_1 与 Y_2 的左公因子,但 Y_1 与 Y_2 是左互质的,因此 $F_l\in U(S)$,同理 $F_r\in U(S)$.所以 $Y_1+Y_2-Y_2DY_1\in U(S)$,$(C_1,C_2)\in S_1(P)$.从而 $S_2(P)\subseteq S_1(P)$.□

注1. 定理1是文献[2]中提出的尚未解决的问题的回答.

注2. $S_1(P)=S_2(P)=S_3(P)\neq\varnothing$(空集)的充分必要条件是 P 是强镇定的.

注3. RSP3中的 C_1 与 C_2 是对称的,即如果 (C_1,C_2) 是RSP3的解,则 (C_2,C_1) 是RSP3的对偶问题的解:

$$\text{(i').}\ C_2\in S(P);\ \text{(ii').}\ C_1\in S(P)\cap S(P_2),P_2=P(I+C_2P)^{-1}$$

注4．RSP3中的(iii),(iv)式可以用下面两条件取代:

(iii'). $\widetilde{Y}_1,\widetilde{Y}_2$ 是右互质的; (iv'). $\widetilde{Y}_1,\widetilde{Y}_2$ 是左互质的.

三种等价的 RSP:RSP1,RSP2,RSP3 从不同的侧面反映了 RSP 的解 C_1,C_2 与被控对象 P 之间的相互关系,对于控制器的可靠设计及控制器的可靠分解问题具有启发意义. 根据定理 1,下面将 RSP1,RSP2,RSP3 统一记为 RSP.

推论 1. 设 P 是强镇定的,$C_1,C_2\in S(P)$满足(1)式,如果 C_1(或 C_2)是稳定的,则 $C_1+C_2\in S(P)$的充分必要条件(C_1,C_2)是 RSP 的解.

推论 1 证明从略. 文献[2,4]中证明,对任意稳定的控制器 $C_1\in S(P)\cap M(S)$,总存在 $C_2\in S(P)$,使得(C_1,C_2)是 RSP 的解. 但是,对于任意给定的不稳定的控制器 $C_1\in S(P)$,是否总存在 $C_2\in S(P)$,使得(C_1,C_2)是 RSP 的解? 回答是否定的,下面定理 2 即回答这个问题,为此先给出一个引理.

引理 4. 设 $P=N_rD^{-1}N_l$,这是(N_r,D)是右互质的,(D,N_l)是左互质的. 则 P 是强镇定的充分必要条件是存在 $Q\in M(S)$,使得 $D+N_lQN_r\in U(S)$.

定理 2. 如果 P 是强镇定的,设 $P=ND^{-1}$,$D+XN=I$,且 $\tilde{N}=N$. 对于给定的控制器 $C_1=Y_1^{-1}X_1=\tilde{X}_1\tilde{Y}_1^{-1}\in S(P)$满足(1)式,则存在 $C_2\in S(P)$,使得(C_1,C_2)是 RSP 的解的充分必要条件 $N((I+X_1N)Y_1)^{-1}X_1N$ 是强镇定的.

证明. 由于(C_1,C_2)是 RSP 的解的充分必要条件是(3)式成立. 不妨设 $Y_2=Y_1+QN$,则 $\Delta_{12}=(I+X_1N)Y_1+X_1NQN$,再由引理 4,$\Delta_{12}\in U(S)$的充分必要条件是 $N((I+X_1N)Y_1)^{-1}X_1N$,是强镇定的. □

在定理 2 中,当 C_1 稳定,即 $Y_1=I$ 时,显然 $N((I+X_1N)Y_1)^{-1}X_1N$ 是强镇定的. 因此,文献[2]的结果是本定理的特例.

推论 2. 如果 P 是稳定的,则对任意控制器 $C_1\in S(P)$,总存在 $C_2\in S(P)$,使得(C_1,C_2)是 RSP 的解.

证明设 $D=I$,$N=P$,这时 $S(P)=\{(I-QP)^{-1}Q:|I-QP|\neq 0,Q\in M(S)\}$. 另设 $Y_1=I-Q_1P$,$X_1=Q_1$,则 $\bar{P}:=N((I+X_1N)Y_1)^{-1}X_1N=(I-PQ_1PQ_1)^{-1}PQ_1P$ 对任意 Q_1 都是强镇定的. 再由定理 2 知,对任意 $C_1\in S(P)$,都存在 $C_2\in S(P)$,使得(C_1,C_2)是 RSP 的解. □

4 结论

本文对 P 是强镇定的被控对象的可靠镇定问题进行了系统的研究. 证明了几种可靠镇定问题定义之间的等价关系,给出了对于任意给定的控制器,存在另一个控制器,使其共同解决可靠镇定问题的充要条件. 由于几乎所有的被控对象都满足强镇定这一条件[1],所以本文结果具有一般意义. 在本文的基础上可以进一步研究控制器的可靠分解问题[5]. 本文结果也为某些定量问题的研究,如调节,跟踪,最优化,灵敏度最小等问题的研究,提供了理论依据.

参 考 文 献

1 Vidyasagar M. Control System Synthesis: A Factorization Approach. Cambridge, MA: MIT. Press, 1985

2 Vidyasagar M, Viswanadham N. Reliable stabilization using a multi-controller configuration. *Automatica*. 1985, **21**(5):599—602

3 Minto K D, Ravi R. New results on the multi-controller scheme for the reliable control of linear plants. *Proc. American Control conference*, 1991, 615—619

4 Gundes A N. Reliable stabilization of linear plants using a two-controller configuration. *Systems & Control Letters*, 1994, **23**: 297—304

5 Gundes A N. Reliable control using two controllers. Proc. 31st IEEE Conf. on Decision and control, 1992: 445—446

RELIABLE STABILIZATION USING MULTI-CONTROLLER CONFIGURATIONS

ZHANG GUOSHAN CHAI TIANYOU GU XINGYUAN

(*Research Center of Automation, Northeastern University, Shenyang* 110006)

Abstract In this paper, the reliable stabilization problem (RSP) of strongly stabilizable plants is studied by using a factorization approach. The equivalent relationship between the different definitions of RSP is proved, and the structure of reliable controllers is characterized. A necessary and sufficient condition is given that, for any given controller, there exists another controller such that they together solve the RSP. This condition provides a method for selecting reliable controllers.

Key words Reliable control system, factorization approach, reliable stabilization, strong stabilization, controller's design.