第 24 卷 第 4 期
1998 年 7 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 4
Jul., 1998

短 文

多元齐次多项式定号性判别方法

苗 原 李春文
(清华大学计算机系 北京 100084) (清华大学自动化系 北京 100084)

摘 要 研究了多元齐次多项式的定号性. 利用齐次多项式的特殊性以及计算机的高速运算能力，构造了一个数值判别算法，并证明了这一算法在概率意义上的正确性. 这一算法已经被编程实现应用于三元，四元齐次多项式定号性的判别中. 这一算法还可以在构造李亚普诺夫函数时获得应用.

关键词 非线性，多项式，定号性，算法.

1 引言

李亚普诺夫函数不仅是重要的判稳工具，还与使系统镇定的控制律[1,2]有着密切的联系. 然而在这一领域的研究中丰富的理论结果[3,4]与难以见到的实用算法形成了巨大反差，随机给出一个含奇异部分的非线性系统，要对其构造李亚普诺夫函数，进而判定其稳定性一般都是十分困难的. 本文与文[5,6]则是从理论分析与算法相结合的角度研究这一问题. 当然，要建立构造李亚普诺夫函数的算法也有很大难度. 文[5]给出的结果使得构造李亚普诺夫函数的约束减少了一半，即只要求 $V(x)$ 导数定号. 文[6]证明了在一定条件下，光滑系统的李亚普诺夫函数的构造等价于多项式系统的李亚普诺夫函数的构造，从而多项式的定号性判据成为核心问题. 文[7]中给出了 2 元齐次多项式正定判别准则的算法，并对随机产生的 40 个奇异非线性系统，均顺利地找到了相应的李亚普诺夫函数，初步证明了这一方法的有效性. 在本文中将对多元齐次多项式给出一定号性判别算法，并用于稳定性分析.

2 主要结果

考虑多项式函数 $P(x)=\sum\limits_{i_1+i_2+\cdots i_n=m}\sum a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ 的正定问题.

由于 $P(x)$ 是齐次多项式，$P(x)$ 在单位球内的性质将代表它在整个 R^n 上的性质.

定理 1. $P(x)$ 正定当且仅当 $P(x)$ 在 $\{x \mid \|x\|=r, r>0\}$ 上正定.

证明. 对 $P(x)$ 采用极坐标表示，令

收稿日期 1995-10-12

$$l = \|x\|, x_1 = l\cos\theta_1, x_2 = l\cos\theta_2, \cdots, x_{n-1} = l\cos\theta_{n-1}, x_n = l\cos\theta_n, \quad (1)$$

其中

$$\cos\theta_1^2 + \cos^2\theta_2 + \cdots + cos^2\theta_n = 1,$$

则

$$P(x) = r^m \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=m \\ \cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cdots+\cos^2\theta_n=1}} a_{i_1\cdots i_n}\cos^{i_1}\theta_1\cdots\cos^{i_n}\theta_n. \quad (2)$$

显然 $P(x)$正定当且仅当 $$\sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=m \\ \cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cdots+\cos^2\theta_n=1}} a_{i_1\cdots i_n}\cos^{i_1}\theta_1\cdots\cos^{i_n}\theta_n > 0,$$

也即 $P(x)$正定当且仅当 $P(x)$在$\{x \mid \|x\| = r, r>0\}$上正定. 证毕.

定理 2. $P(x)$正定，当且仅当 $\inf_{\|x\|=1} P(x)>0$.

令 $S_r=\{x \mid \|x\| = r, r>0\}$. 在定理 1 和定理 2 的基础上，可以利用数值算法求取 $P(x)$在 S_r 上的最小值，通过最小值的符号来判定 $P(x)$的正定性. 这是一个超球面上的全局优化问题，需要区分全局极小和局部极小.

定理 3. 令 $V=\{x \mid P(x)=c, c$ 为一常数$, x\in S_r\}$，若 V 连通，则视 V 为一个点，则 $P(x)$在 S_r 上的局部极小点只有有限个.

从单位超球 S_r 的任一点出发，求其局部极小点，我们已有软件包可以实现. 随机变动初始点，即可求得一系列局部极小点. 随初始点的增加，求得全部局部极小点的概率是趋于 1 的. 设 S_r 被分成 k 个区域$\{D_1, \cdots, D_k\}$，每个区域中有一个局部极小点，且区域中任一点均有下降至该极小点的下降曲线. S_i 为 D_i 的面积.

命题 1. 随机撒取 K 个初始点，利用数值算法求取 $P(x)$在 S_r 上的最小值，通过最小值的符号来判定 $P(x)$的正定性，产生错误的概率不超过

$$p_K = 1 - \frac{c_K{}^k k! \prod_{i=1}^{k} \frac{S_i}{S}((K-k)\sum_{i=1}^{k}\frac{S_i}{S})^k}{(K\sum_{i=1}^{k}\frac{S_i}{S})^k} = 1 - \frac{c_K{}^k k! \prod_{i=1}^{k}\frac{S_i}{S}(K-k)^k}{K^k}.$$

由此可知$\lim_{K\to\infty} p_K=0$，故上述方法在概率意义上是可靠的.

算法：

1)取 $r=1, S_r=S_1=\{x \mid \|x\| =1\}$，设定总次数 $K, m=1$；

2)随机产生初始点 x_0；

3)由 x_0 出发，求取局部极小点的值 f_0；

4)若 $f_0<0$，则 $P(x)$不正定，转第 7 步；

5)若到达 K 次，$m=K$，则 $P(x)$至少以概率 $p=1-k\sum_{i=1}^{k}(1-\frac{S_{\delta_i}}{S})^K$ 正定转第 7 步；

6)$m=m+1$，转第 2 步；

7)结束.

3 例子

为便于验证，举 2 维的例子. 以下将多项式按 x 的降幂排列，为记述方便，只列出系数，如 1 2 3 −4 5 即 $x^4+2x^3y+3x^2y^2-4xy^3+5y^4$.

对多项式 $P(x,y)=0.8063\quad 0.9848\quad 1.0384\quad 1.365\quad 0.7663$，在 S_1 上进行上述搜索，得到 2 个局部极小点

$$x=-0.66\quad y=0.75\quad P=0.5769,$$
$$x=0.66\quad y=-0.75\quad P=0.5769.$$

$P(x)$在 S_r 上的图像如图 1 所示. 说明搜索结果是正确的，由于极小值为 0.5769，从而 $P(x,y)$是正定的. $P(x,y)$的图象如图 2 所示. 由图 2 可知，$P(x,y)$是正定的，说明搜索正确.

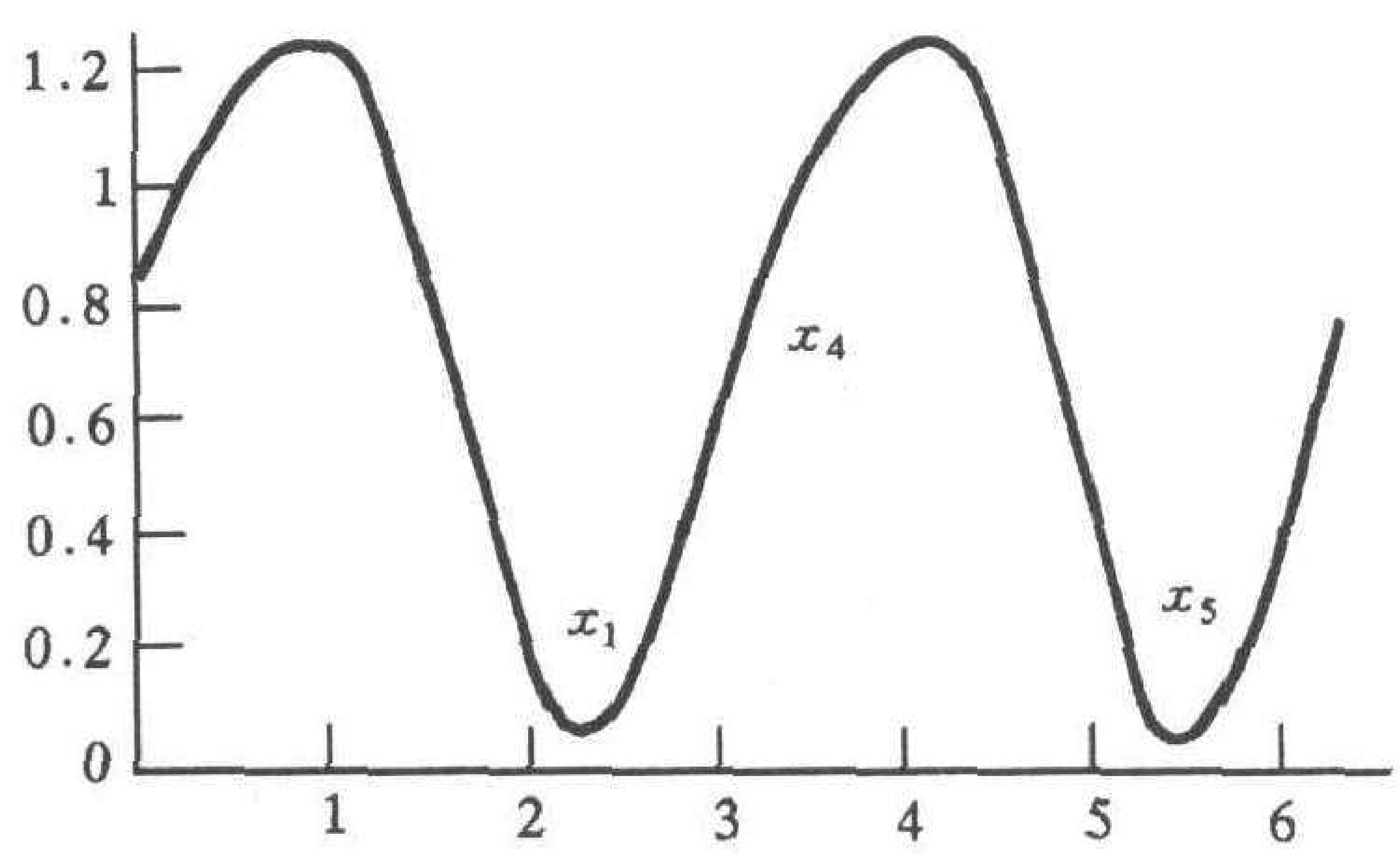

图 1

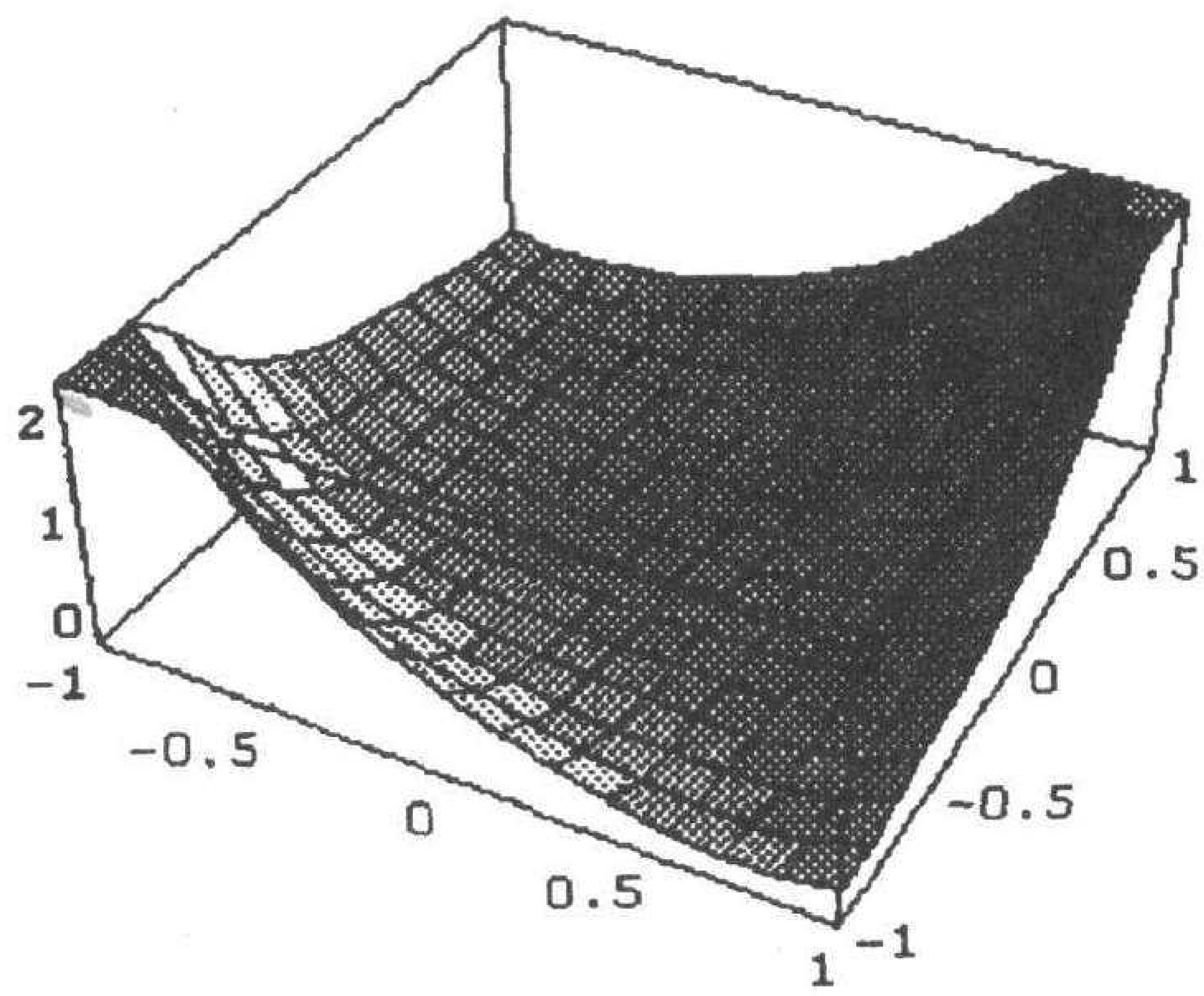

图 2

事实上，对系统

$$\dot{X}_1=F[1]=-0.325-0.215-0.155-0.235,$$
$$\dot{X}_1=F[2]=0.045-0.235-0.185-0.455,$$

选
$$V=-1.3-0.86-0.62<0,$$
则
$$DV=0.8063\quad 0.9848\quad 1.0384\quad 1.365\quad 0.7663>0,$$
因而系统是渐近稳定的.

4　结论与讨论

本文给出了多元齐次多项式定号性的一个数值判别算法，这一算法可以在非线性系统稳定性判别中构造李亚普诺夫函数时获得应用. 本文与文[7]的方法差别在于文[7]的正定判别方法是一种解析的方法，而本文方法正确的概率趋于 1. 本文的方法比文[7]适用范围更大. 算法研究与理论研究的思路有很大差异. 在算法中，求解方程获得表达式常常是不现实的，过大的计算量也是没有意义的. 文[7]的方法尽管可以在理论上推广到 n 维一般情形的方法，但在算法上是不现实的.

参　考　文　献

1　Lin Y, Sontag E D. A universal formula for stabilization with bounded controls. *System & Control Letters*, 1991, **16** (6): 393−397

2　Sontag E D. A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization, *System & Control Letters*, 1989,**13**(2):117－123

3 黄琳,于年才,王龙.李亚普诺夫方法的发展与历史性成就.自动化学报,1993,**19**(5):587－594

4 舒仲周,王照林.运动稳定性的研究进展和趋势.力学进展,1993,**23**:424－431

5 Li Chunwen, Miao Yuan, Miao Qinghai. A method to judge the stability of dynamical system. In: Proceeding of YAC'95 IFAC, Beijing, 1995. Pergamon press, 101－106

6 苗原,李春文,胡世文.二维齐次高阶奇异系统的稳定性判别算法.控制理论与应用,1997,**14**(3):430－433

7 苗原,李春文.由李亚普诺夫函数导数的 Taylor 级数的部分和判定级数本身的定号性.见:中国控制会议论文集.北京:中国科学技术出版社,1995,435－438

DEFINITENESS OF MULTI-VARIABLE HOMOGENEOUS POLYNOMIAL

MIAO YUAN

(*Computer Dept.*, *Tsinghua Univ.*, *Beijing* 100084)

LI CHUNWEN

(*Automation Dept.*, *Tsinghua Univ.*, *Beijing* 100084)

Abstract This paper studies definiteness of multi-variable homogeneous polynomials. Based on the special character of homogeneous polynomials and ability of modern computers, a digital algorithm was designed to judge the definiteness of homogeneous polynomials. It was also proved that this numeric method is correct in the sense of probability. The algorithm was programmed for judging stability of homogeneous polynomials of three and four variables, and it has a lot of value for finding Lyapunov functions in stability judgment of nonlinear systems.

Key words Polynomials, definiteness, algorithm, nonlinear systems.