第24卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 24, No. 4
1998年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jul., 1998

短文

严格正则多输入多输出对象同时镇定[1)]

曹永岩 孙优贤
(工业控制技术国家重点实验室,浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027)

摘 要 使用逆LQ方法讨论了 r 个严格正则多输入多输出对象的同时镇定问题,基于矩阵不等式方法得到了静态输出反馈可同时镇定的充要条件,本文证明 r 个对象静态输出反馈同时镇定等价于 r 个耦合LQ控制问题的解.然后,基于迭代线性矩阵不等式技术给出了一种迭代求解方法,并给出了算例.

关键词 同时镇定,代数Riccati不等式(ARI),静态输出反馈,线性矩阵不等式(LMI).

1 输出反馈的可镇定条件

考虑 n 阶动态系统

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{x} \in \mathscr{R}^n$ 表示状态向量,$\boldsymbol{u} \in \mathscr{R}^m$ 控制向量,A, B 为具有合适维数的常矩阵.

众所周知,线性系统(1)可状态反馈镇定当且仅当存在矩阵 $Q>0, R>0$ 使得如下ARE存在唯一解 $P>0$.

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0,$$

或者说存在矩阵 $P>0, R>0$ 满足如下 *ARI*

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P < 0.$$

实际上,如果 (A,B) 可镇定,那么对于任意 $Q>0, R>0$,上述ARE一定存在唯一正定解 $P>0$,见文[2],对于任意 $R>0$,上述ARI一定存在一可行解,见文[1,2].

考虑如下具有交叉项的LQ控制问题

$$v(x_0) = \int_0^{\infty} (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}S\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{u})\mathrm{d}t. \tag{2}$$

其中权矩阵 $Q>0, R>0, S$ 满足

$$Q - S^{\mathrm{T}}R^{-1}S > 0, \tag{3}$$

其解为

$$\boldsymbol{u} = K\boldsymbol{x}, K = -R^{-1}(B^{\mathrm{T}}P + S),$$
$$PA + A^{\mathrm{T}}P - (B^{\mathrm{T}}P + S)R^{-1}(B^{\mathrm{T}}P + S) + Q = 0. \tag{4}$$

---

1)国家自然科学基金资助项目和浙江大学曹光彪高科技发展基金资助项目.
收稿日期 1996-01-08

引理 1. 线性时不变系统(1)可状态反馈镇定当且仅当如下等价条件之一成立：
1)存在合适维数的矩阵 $P>0,Q>0,R>0,S$ 使得不等式(3)和 ARE(4)成立；
(2)存在合适维数的矩阵 $P>0,R>0,S$ 满足如下具有交叉项的 ARI

$$PA+A^{\mathrm{T}}P-(B^{\mathrm{T}}P+S)R^{-1}(B^{\mathrm{T}}P+S)+S^{\mathrm{T}}R^{-1}S<0. \tag{5}$$

证明. 略.

2　主要结论

下面考虑 r 个严格正则对象 G_i 的同时镇定问题

$$\dot{x}_i(t)=A_ix_i(t)+B_iu_i(t),y_i(t)=C_ix_i(t), \tag{6}$$

或者

$$\dot{x}_i(t)=A_ix_i(t)+B_iu_i(t),y_i(t)=x_i(t). \tag{6'}$$

其中状态 $x_i\in\mathscr{R}^n$，输入 $u_i\in\mathscr{R}^m$，输出 $y_i\in\mathscr{R}^p$，n 为对象 G_i 的阶. 假定

$$C_i=C,i=1,\cdots,r, \tag{7}$$

并且 C 满秩. 这一条件并不严格，对于 r 个有理严格正则对象 $G_i(s)$，我们可以得到可观测形式的同阶实现. 另外对于许多不确定系统，仅在系统矩阵和输入矩阵中具有不确定性. 令 E 为 C 的右逆，即，$CE=I_p$. 因为 C 满秩，所以

$$E=C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{8}$$

因此 $E_{\perp}=EC$ 为关于 $\mathrm{Im}(C^{\mathrm{T}})$的直交投影矩阵，并且 $x_{\perp}=E_{\perp}x=Ey$.

定理 1. 给定 r 个对象(6)，它们可静态输出反馈同时镇定当且仅当存在矩阵 $P_i>0$，$R>0,Q_i>0,M$ 满足如下耦合 ARE

$$P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i-(S_i+B_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\mathrm{T}}R^{-1}(S_i+B_i^{\mathrm{T}}P_i)+Q_i=0,i=1,\cdots,r, \tag{9}$$

$$Q_i-S_i^{\mathrm{T}}R^{-1}S_i>0, \tag{10}$$

$$S_i=ME_{\perp}-B_i^{\mathrm{T}}P_i; \tag{11}$$

并且静态输出反馈同时镇定增益为

$$K=-R^{-1}MC^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}; \tag{12}$$

或者存在 $P_i>0,R>0,M$ 满足如下耦合(11)约束的 ARI

$$P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i-(S_i+B_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\mathrm{T}}R^{-1}(S_i+B_i^{\mathrm{T}}P_i)+S_i^{\mathrm{T}}R^{-1}S_i<0,i=1,\cdots,r. \tag{13}$$

证明. 充分性显然. 仅需证明必要性. 若这 r 个对象可静态输出反馈同时镇定，那么一定存在状态反馈增益 $F=KC$ 以及 r 个矩阵 $P_i>0$，使得

$$x^{\mathrm{T}}[(A_i+B_iF)^{\mathrm{T}}P_i+P_i(A_i+B_iF)]x<0,x\neq 0,i=1,\cdots,r.$$

可以假定 $F=ME_{\perp}$，M 为一合适维数的任意矩阵，因此上式等价于

$$x^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i)x<0,\quad x\in\mathrm{Ker}(F),\quad x\neq 0,\quad i=1,\cdots,r.$$

定义

$$\alpha_i^*=\max_x\frac{x^{\mathrm{T}}(P_iA_i+A_i^{\mathrm{T}}P_i)x}{x^{\mathrm{T}}(E_{\perp}M^{\mathrm{T}}ME_{\perp})x},\quad x\notin\mathrm{Ker}(ME_{\perp}),\ x\neq 0,\quad i=1,\cdots,r$$

$$\alpha^*=\max_{i=1,\cdots,r}(\alpha_i^*)$$

由文[3]知，一定有 $\alpha_i^*<0,i=1,\cdots,r$. 因此 $\alpha^*<\infty$，即 α^* 有上界. 因为 $F=ME_{\perp}$，故对于

任意 $\alpha>\max(0,\alpha^*)$，都有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i)\boldsymbol{x} < \alpha\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(E_\perp M^{\mathrm{T}}ME_\perp)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \neq 0, i = 1,\cdots,r.$$

因此对于任意对称矩阵 R 满足 $R^{-1}\geq\alpha I$，一定有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i)\boldsymbol{x} < \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(E_\perp M^{\mathrm{T}}R^{-1}ME_\perp)\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \neq 0, i = 1,\cdots,r$$

即

$$P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i - E_\perp M^{\mathrm{T}}R^{-1}ME_\perp < 0, i = 1,\cdots,r$$

这也意味着存在矩阵 $Q_i>0$ 满足式(9). 由定理 1 不等式(10)也是其一必要条件.　证毕.

这一定理意味着，静态输出反馈同时镇定可以看作 r 个耦合 LQ 控制问题存在合适解 P_i,Q_i,R,S_i，并满足耦合约束(11).

系 1. 给定线性时不变对象(A,B,C)，可静态输出反馈镇定，当且仅当存在矩阵 $Q>0,P>0,R>0,M$ 满足如下带约束条件的 ARE

$$PA + A^{\mathrm{T}}p - (S + B^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}R^{-1}(S + B^{\mathrm{T}}P) + Q = 0, \tag{14}$$

$$Q - S^{\mathrm{T}}R^{-1}S > 0, \tag{15}$$

$$S = ME_\perp - B^{\mathrm{T}}P, \tag{16}$$

或者存在 $P>0,R>0,M$ 满足(16)约束的 ARI

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - (S + B^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}R^{-1}(S + B^{\mathrm{T}}P) + S^{\mathrm{T}}R^{-1}S < 0. \tag{17}$$

系 2. 给定 r 个严格正则对象 G_i，它们可状态反馈同时镇定，当且仅当存在矩阵 $P_i>0,R>0,Q_i>0,M$ 满足如下耦合 ARE

$$P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i - (S_i + B_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\mathrm{T}}R^{-1}(S_i + B_i^{\mathrm{T}}P_i) + Q_i = 0, i = 1,\cdots,r, \tag{18}$$

$$Q_i - S_i^{\mathrm{T}}R^{-1}S_i > 0, \quad S_i = M - B_i^{\mathrm{T}}P_i; \tag{19}$$

并且状态反馈同时镇定控制律可取为

$$K = - R^{-1}M; \tag{20}$$

或者存在矩阵 $P_i>0,R>0,M$ 满足如下耦合 ARI

$$P_iA_i + A_i^{\mathrm{T}}P_i - (S_i + B_i^{\mathrm{T}}P_i)^{\mathrm{T}}R^{-1}(S_i + B_i^{\mathrm{T}}P_i) + S_i^{\mathrm{T}}R^{-1}S_i < 0, i = 1,\cdots,r, \tag{21}$$

$$S_i = M - B_i^{\mathrm{T}}P_i.$$

3 迭代 LMI 求解算法

由上节可知，静态输出反馈镇定可转化为解带约束(16)的矩阵不等式(17)，静态输出反馈同时镇定问题可转化为解带约束(11)的矩阵不等式(13)，状态反馈同时镇定问题可转化为解带约束(19)的矩阵不等式(21). 显然其关键为解矩阵不等式(5)，因为约束(11)，(16)，(19)均为线性的，仅对 S 的取值范围进行约束，这在 LMI 中是很容易实现的. 下面我们给出一种基于 LMI 技术的迭代求法.

显然不等式(5)等价为

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P - S^{\mathrm{T}}R^{-1}B^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}S < 0, \tag{22}$$

实际上这是一非线性矩阵不等式. 由引理 1 的说明和定理 1 的证明可知，我们可令 $R=I$，那么(22)就成为一个 BMI(双线性矩阵不等式)了. 下面给出它的一种迭代形式的等价条件.

定理 2. BMI(22)存在可行解($P>0,S$),当且仅当

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - 2PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + (B^{\mathrm{T}}P - S)^{\mathrm{T}}R^{-1}(B^{\mathrm{T}}P - S) < 0, \tag{23}$$

证明. 充分性.

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P - S^{\mathrm{T}}R^{-1}B^{\mathrm{T}}P - PBR^{\mathrm{T}}S \leq$$
$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P - S^{\mathrm{T}}R^{-1}B^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}S + S^{\mathrm{T}}R^{-1}S =$$
$$PA + A^{\mathrm{T}}P - 2PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + (B^{\mathrm{T}}P - S)^{\mathrm{T}}R^{-1}(B^{\mathrm{T}}P - S) < 0.$$

必要性. 不难发现,一定存在标量 $\rho>1$,使得

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P - S^{\mathrm{T}}R^{-1}B^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}S + \rho^{-2}S^{\mathrm{T}}R^{-1}S < 0,$$

即

$$PA+A^{\mathrm{T}}P-(\rho^2+1)PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+(\rho B^{\mathrm{T}}P-\rho^{-1}S)^{\mathrm{T}}R^{-1}(\rho B^{\mathrm{T}}P-\rho^{-1}S)<0. \tag{24}$$

因此

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - 2\rho^2PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + (\rho B^{\mathrm{T}}P - \rho^{-1}S)^{\mathrm{T}}R^{-1}(\rho B^{\mathrm{T}}P - \rho^{-1}S) < 0.$$

用 P 代替 ρ^2P,就可得到不等式(23).　证毕.

因为$-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P$ 的负号,(24)不能简化为一 LMI. 为了处理这一项,我们引入一附加变量 X. 因为对于同维的 X,P 总有$(X-P)^{\mathrm{T}}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(X-P)\geq 0$,所以

$$X^{\mathrm{T}}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}X - X^{\mathrm{T}}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}X \leq P^{\mathrm{T}}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P \tag{25}$$

不等式成立当且仅当 $X=P$. 因此我们得到 BMI(22)有解的一个充分条件.

$$\begin{aligned} &A^{\mathrm{T}}P + PA - 2XBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P - 2PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}X + 2XBR^{-1}B^{\mathrm{T}}X + \\ &(B^{\mathrm{T}}P - S)^{\mathrm{T}}R^{-1}(B^{\mathrm{T}}P - S) < 0 \end{aligned} \tag{26}$$

定理 3. BMI(22)存在一可行解($P>0,S$)当且仅当存在 $X>0$,使得矩阵不等式(26)成立.

证明. 充分性已证,下面证明必要性. 显然,若 BMI(22)存在一可行解($P>0,S$),那么一定存在正实数 $\varepsilon>0$ 满足

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - 2PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + (B^{\mathrm{T}}P - S)^{\mathrm{T}}R^{-1}(B^{\mathrm{T}}P - S) + \varepsilon I < 0.$$

选择对称矩阵 $\overline{X}\geq 2BR^{-1}B^{\mathrm{T}}$,令 $X=p-\Delta X,\Delta X=\varepsilon^{1/2}\overline{X}^{-1/2}$,那么就有

$$2(P - X)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(P - X) \leq \varepsilon I.$$

因此矩阵不等式(26)成立.　证毕.

由 Schur 补,式(26)等价于如下矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P + PA - 2XBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P - 2PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}X + 2XBR^{-1}B^{\mathrm{T}}X & (B^{\mathrm{T}}P - S)^{\mathrm{T}} \\ (B^{\mathrm{T}}P - S) & -R \end{bmatrix} < 0. \tag{27}$$

显然,X 固定时,式(27)为关于 S 和 P 的 LMI 问题. 然而 LMI(27)(假设 X 固定时)仅为 BMI(22)的一充分条件. 事实上,如果我们找到了它的一可行解,也就找到了 BMI(22)的解. 一般来说它无解. 但是我们可以利用所谓的$-\alpha/2$-可镇定性对它进行放松,即得到必要条件

$$\begin{aligned} &A^{\mathrm{T}}P + PA - \alpha P - 2XBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P - 2PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}X + 2XBR^{-1}B^{\mathrm{T}}X \\ &+ (B^{\mathrm{T}}P - S)^{\mathrm{T}}R^{-1}(B^{\mathrm{T}}P - S) < 0. \end{aligned}$$

基于极点逐步左移到左半平面,我们得到如下迭代算法.

步骤 1. 令 $i=1,R=I$. 选择 $Q>0$ 解 ARE

$$A^{\mathrm{T}}P + PA - PBB^{\mathrm{T}}P + Q = 0.$$

假定其解为 X.

步骤 2. 解关于 P_i, S, α_i 的优化问题 OP1：极小化满足如下 LMI 约束的 α_i

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P_i + P_iA - 2XBB^{\mathrm{T}}P_i - 2P_iBB^{\mathrm{T}}X + 2XBB^{\mathrm{T}}X - \alpha_iP_i & (B_{\mathrm{T}}P_i - S)^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}P_i - S & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{28}$$

$$P_i = P_i^{\mathrm{T}} > 0 \tag{29}$$

步骤 3. 解关于 P_i, S 的优化问题 OP2：极小化 trace(P_i) 并满足 LMI 约束(28)，(29).

步骤 4. 如果 $\alpha_i \leq 0$，(P, S) 就是一可行解，算法结束.

步骤 5. 如果 $\| X - P_i \| < \delta$(预先给定的任意小的正实数)，转步骤 6，

否则令 $X = P_i, i = i + 1$，转步骤 2.

步骤 6. 系统可能无解，算法结束.

OP1 是一广义特征值问题，这一步保证极点的逐步左移. 不等式(25)在这一算法中起了关键作用. 对于优化问题 OP1，在每一次迭代中其解的存在性都由(25)保证. 而且 α_i 是一递减序列，因为对于满足如下不等式的任意 $P_i > 0, S$

$$A^{\mathrm{T}}P_i + P_iA - 2XBB^{\mathrm{T}}P_i - 2P_iBB^{\mathrm{T}}X + 2XBB^{\mathrm{T}}X - \alpha_iP_i + (B^{\mathrm{T}}P_i - S)^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}P_i - S) < 0,$$

一定有

$$A^{\mathrm{T}}P_i + P_iA - 2P_iBB^{\mathrm{T}}P_i - \alpha_iP_i + (B^{\mathrm{T}}P_i - S)^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}P_i - S) < 0.$$

这就是说下一次一定可以找到解 $\alpha_{i+1} \leq \alpha_i$，因为 $P_{i+1} = P_i, \alpha_{i+1} = \alpha_i$ 就是一解.

4 示例

考虑变参数系统

$$G(s) = \frac{s + \sqrt{\theta} + 1}{s^2 + (\theta^2 - 10)s + 3\theta + 11}, \quad 3 \leq \theta \leq 11,$$

标称工作点为 $\theta_0 = 7$. 考虑在工作点 $\theta_0 = 7, \theta_1 = 3, \theta_2 = 11$ 的 3 个对象的同时镇定问题

$$A_0 = \begin{bmatrix} -39 & -32 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3.646 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.732 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -111 & -44 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4.317 \end{bmatrix}, C_0 = C_1 = C_2 = [1 \quad 0].$$

使用本文算法，经过 29 次迭代得到 $M = [2.5709 \quad 0]$，

$$P_0 = \begin{bmatrix} 7.5030 & -0.0030 \\ -0.0030 & 0.1521 \end{bmatrix} \times 10^{-2}, S_0 = [2.4960 \quad -0.0055],$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.2929 & -0.0140 \\ -0.0140 & 0.04839 \end{bmatrix}, \qquad S_1 = [1.3162 \quad -0.1182],$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2.8464 & -0.0004 \\ -0.0004 & 0.0438 \end{bmatrix} \times 10^{-2}, S_2 = [2.5425 \quad -0.0019].$$

闭环特征值分别为{-40.5506, -1.0203},{$-0.7855\pm 5.1388i$},{-113.0837, -0.4872}.因此 $K=-2.5709$ 同时镇定这 3 个对象.

参 考 文 献

1 Boyd SL, EL Ghaoui, Feron E, Balakrishnan V. Linear matrx inequalities in system and control theory, SIAM, Philadelphia, 1994

2 Anderson BDO, Moore JB. Optimal control: Linear Quadratic Methods. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990

3 Cheng D, Martin CF. Boundaries of conditional quadratic forms——a comment on "Stabilization via static output feedback". *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1995, **40**(3), 500—502

SIMULTANEOUS STABILIZATION OF THE MIMO STRICTLY PROPER PLANTS

CAO YONGYAN　SUN YOUXIAN

(*Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract Based on the inverse LQ approach, this paper addresses the siumltaneous stabilizability for r MIMO strictly proper plants. Some necessary and sufficient conditions for the static output feedback simultaneous stabilization are derived using the matrix inequality method. It is proven that this problem is equivalent to the existence of the solution of r coupled LQ control problem. Then an iterative algorthm based on the LMI technique is presented to obtain the feedback gain. The illustrated examples show that it is very efficient.

Key words Simultaneous stabilization, algebraic Riccati inequality, output feedback, linear matrix inequality.