第24卷 第6期 自动化学报 Vol. 24, No. 6
1998年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1998

基于双重准则的二自由度预测控制——连续情况[1)]

刘 兵 冯纯伯
（电力部电力自动化研究院系统研究所 南京 210003） （东南大学自动化研究所 南京 210096）

摘 要 对二自由度连续预测控制系统进行了讨论. 在保留连续预测控制基本特点的条件下，取包含连续预测控制指标项、灵敏度及补灵敏度的综合指标函数，通过广义谱分解及构造丢番图方程，求得使闭环系统内稳的解. 最后举例说明该方法的有效性.

关键词 连续预测控制，广义谱分解，双重准则.

1 引 言

预测控制系统的稳定性和鲁棒性是引起广泛关注的重要问题. 由于预测控制算法严重的非线性，使得系统的性能难以分析，因此缺乏一般的理论结果. 同时，预测控制在时域内对给定的算法构造控制结构时，无法像鲁棒控制等那样直接考虑干扰对系统的影响. 对离散系统，文[4]从一新的角度提出二自由度线性二次高斯预测控制算法，利用谱分解方法求得使闭环系统稳定的解，但它忽略了噪声及控制约束对系统的影响，同时“在实现时却是通常的 LQG 问题”，不具有预测控制的基本特点. 对连续系统，目前还没有类似的结果.

本文参考文[3,4]中的双重准则，直接面向噪声干扰设计连续预测控制系统，求得使闭环系统内稳的解.

2 系统描述及预测估计

在不会混淆的情况下，记 $f\triangleq f(s)$，复共轭转置 $f^*\triangleq f^*(s)\triangleq f^T(-s)$，$\Phi_{..}$ 表示相应的功率谱，$\mathscr{L}(\cdot)$表示 Laplase 变换.

参考文[3,4]考虑如图 1 所示的二自由度控制系统，其中 ζ,ξ,η 为单位方差的白噪声，并且 ζ,ξ,η 相互独立；$W_r=E(s)/A_e(s)$，$W_d=C(s)/A(s)$，$W_v=D(s)/A(s)$分别为参考输入、干扰及可测噪声模型，并且 $E(s)$，$A_e(s)$稳定；$W=B(s)/A(s)$为系统模型；$H_f=e^{-k_0 s}$为测量延迟；控制器 C_{01}和 C_{02}表示两个待定的自由度.

利用文[3,4]的新息模型(innovation model)方法，图 1 所示的系统等价为

$$A(s)y(s)=B(s)u(s)+D_n(s)\varepsilon(s), \tag{1}$$

其中 $\varepsilon(t)$为单位方差白噪声，$D_n(s)$稳定且满足

1) 国家自然科学基金和河南省教委自然科学基金资助课题.

收稿日期 1996-02-14

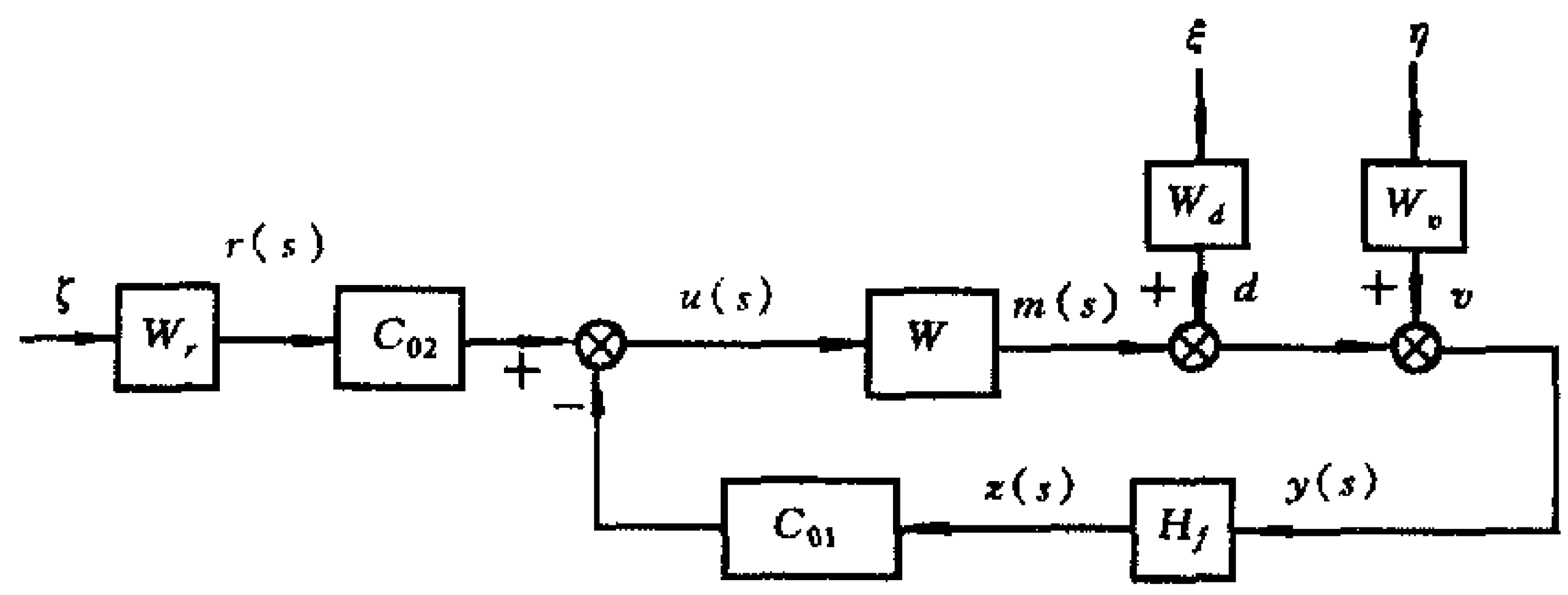

图 1 二自由度连续闭环控制系统

$$D_n D_n^* = D\Phi_{\eta\eta}D^* + CC^* \text{ 且 } \Phi_{d_v d_v} = \Phi_{dd} + \Phi_{vv}, d_v(t) = \frac{D_n}{A}\varepsilon(t). \tag{2}$$

仿文[1,5],有估计的 s 域表示下式

$$\mathscr{L}(\hat{y}_a(t+T)) = p(s)\mathscr{L}(\hat{y}(t+T)) = T_{N_y}(\overline{H}u(s) + Y^0(s)) + p(s)y(s), \tag{3}$$

$$s^k p(s)\hat{y}(s) = \frac{E_k B}{D_n}u(s) + \frac{F_k}{D_n}y(s), \tag{4}$$

其中 $p(s)$为稳定的辅助输出多项式,且 $p(0)=1$;$y_a(t+T)$为时域内辅助输出;$T_{N_y}=[1, T, \cdots, T^{N_y}/N_y!]$,$N_y$ 为 Taylor 展开截取项数;$\overline{H}=H_yS$,$S=[1,s,\cdots,s^{N_{u0}}]^{\mathrm{T}}$,$N_{u0}=\min\{N_u, \partial p(s)+N_y-\rho\}$,$N_u$ 为系统的控制阶[1],ρ 为系统的相对阶,$\partial(\cdot)$表示$(\cdot)$的阶次,H_y 是$(N_y+1)\times(N_{u0}+1)$阶准下三角矩阵,其元素为 $H_k(s)$的相应系数;$Y^0(s)=[0, y_1^0(s),\cdots,y_{N_y}^0(s)]^{\mathrm{T}}$,$y_k^0(s)=(G_k(s)u(s)+F_k(s)y(s))/D_n(s)$;$E_k(s),F_k(s),G_k(s),H_k(s)$满足如下关系[1]

$$s^k p(s)D_n(s) = A(s)E_k(s) + F_k(s), \quad E_k(s)B(s) = D_n(s)H_k(s) + G_k(s). \tag{5}$$

引理 1. 对图 1 所示的控制系统有

$$s^k p(s)\hat{y}(s) = WS_0C_{02}s^k p(s)r(s) + S_0\frac{F_k}{D_n}d_v(s), \tag{6a}$$

$$s^k p(s)\hat{u}(s) = S_0C_{02}s^k p(s)r(s) - M_0\frac{F_k}{D_n}d_v(s), \qquad k=0,1,\cdots,T_{N_y}, \tag{6b}$$

其中 $S_0=1/(1+C_{01}H_fW)$,$M_0=C_{01}H_fS_0$ 分别为灵敏度和控制灵敏度.

证明. 由式(4),(1)和图 1,整理后可知式(6)成立. 证毕.

类似离散预测控制,不妨令 $\hat{y}(s)=y(s)$,$\hat{u}(t)=u(s)$. 由式(6)和(3)可得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\hat{y}_a(t+T)) = {} & \left[T_{N_y}G_h + (T_{N_y}F_d + p(s))W\right]S_0C_{02}r(s) + \\ & \left[(T_{N_y}F_d + p(s))S_0F_{d0} - T_{N_y}G_hM_0F_{d0}\right]d_v(s),\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $G_h=\overline{H}+\left[0,\frac{G_1}{D_n},\frac{G_2}{D_n},\cdots,\frac{N_{N_y}}{D_n}\right]^{\mathrm{T}}$,$F_{d0}=\frac{F_0}{p(s)D_n}$,$F_d=\left[0,\frac{F_1}{D_n},\frac{F_2}{D_n},\cdots,\frac{F_{N_y}}{D_n}\right]^{\mathrm{T}}$,

$$\mathscr{L}(\hat{u}(t+T)) = \sum_{k=0}^{N_u}\frac{T^k}{k!}s^k u(s) = T_{N_u}S_vS_0C_{02}r(s) - T_{N_u}F_pM_0d_v(s), \tag{8}$$

式中 $T_{N_u}=[1,T,\cdots,T^{N_u}/N_u!]$,$S_v=[1,s,\cdots,s^{N_u}]^{\mathrm{T}}$, $F_p=[F_0,F_1,F_2,\cdots,F_{N_u}]^{\mathrm{T}}/(p(s)D_n)$.

和离散情况不同,连续情况要求参考轨迹具有连续性和可微性. 因此,下面参考文[5, 1],采用"未来"参考模型 $R_f(s)$对当前参考量 $r(t)$在区间$[t,t+T]$的输出 $R(t,s)=R_f(s)\frac{1}{s}r(t)\approx\sum_{k=0}^{N_y}r_ks^{-(k+1)}r(t)$作为未来的参考量关于 T 的 s 域表示. r_k 为 $R_f(s)$的 Markov 参

数,记 $r_v=[r_0,r_1,\cdots,r_{N_y}]^{\mathrm{T}}$. 对 $R(t,s)$关于 T 求反 Laplase 变换,然后关于 t 求 Laplase 变换,则有

$$R(s,T)=T_{N_y}r_v r(s). \tag{9}$$

3 预测控制算法

考虑连续系统预测控制的性能要求,取类似文[5]的指标函数

$$J_1=E\left\{\int_{N_1}^{N_2}[Q_1(s)(\hat{y}_a(t+T)-R(t,T))]^2\mathrm{d}T+\int_0^{N_c}[Q_2(s)\hat{u}(t+T)]^2\mathrm{d}T\right\}=$$
$$\frac{1}{2\pi j}\int_{N_1}^{N_2}\oint_D Q_1^*Q_1\Phi_{ee}\mathrm{d}s\mathrm{d}T+\frac{1}{2\pi j}\int_0^{N_c}\oint_D Q_2^*Q_2\Phi\,\hat{u}(t+T)\hat{u}(t+T)\mathrm{d}s\mathrm{d}T. \tag{10}$$

其中 $e=\hat{y}_a(t+T)-R(t,T)=\mathscr{L}^{-1}(\mathscr{L}(\hat{y}_a(t+T))-R(s,T))$;$N_1,N_2,N_c,Q_1(s),Q_2(s)$的意义同文[1,5];$D$ 为包括虚轴的右半复平面内的封闭曲线.

文[2]在 Hardy 空间 $\boldsymbol{H}_2$ 中,求解以式(11)为指标函数的鲁棒控制问题的方法,为增强预测控制系统对噪声干扰的鲁棒性提供了可借鉴的方法.

$$\|W_1S_0\|_2^2+\|W_2(1-S_0)\|_2^2, \tag{11}$$

其中 W_1,W_2 为加权量. 令 m_0,z_0 分别表示零参考输入时系统的输出和控制器输入,由图1知 $z_0(s)=S_0H_f[d(s)+v(s)]$,$m_0(s)=-WM_0[d(s)+v(s)]$. 为抑制噪声对系统的影响,取指标函数

$$J_2=E\{\|W_1z_0\|^2+\|W_2m_0\|^2\}=\frac{1}{2\pi j}\oint_D(W_1W_1^*\Phi_{z_0z_0}+W_2W_2^*\Phi_{m_0m_0})\mathrm{d}s. \tag{12}$$

取综合指标函数为

$$J=J_1+J_2, \tag{13}$$

取加权量 $Q_i=Q_{ni}/A_w(i=1,2)$,$W_1=W_{n1}/A_w$,$W_2=AW_{n2}/A_w$,A_w 稳定.

假设参考量 $r(t)$在$(-\infty,t+\tau]$内已知. 为书写简洁,概括以式(13)为指标函数的优化控制器按如下步骤求解:

1)谱分解

$$\begin{aligned}D_0=\;&Q_{n1}^*Q_{n1}[((G_hD_n)A+(F_dD_n)B)^*T_{yy}((G_hD_n)A+(F_dD_n)B)+\\&T_y((G_hD_n)A+(F_dD_n)B)B^*p^*(s)D_n^*+D_np(s)B((G_hD_n)A+\\&(F_dD_n)B)^*T_y^T+(N_2-N_1)p(s)p^*(s)B^*BD_n^*D_n],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_{c1}^*D_{c1}=\;&D_0F_0F_0^*+Q_{n2}^*Q_{n2}(F_pp(s)D_n)^*T_{uu}(F_pp(s)D_n)A^*AD_n^*D_n+\\&(W_{n1}^*W_{n1}+W_{n2}^*W_{n2}A^*A)B^*B(D_n^*D_n)^2p^*(s)p(s),\end{aligned} \tag{14}$$

$$D_{c2}^*D_{c2}=D_0+Q_{n2}^*Q_{n2}S_v^*T_{uu}S_vAA^*D_n^*D_n, \tag{15}$$

并且 D_{c1},D_{c2}稳定.

2)构造丢番图方程

$$\begin{aligned}D_{c1}^*K+L(A_wAD_np(s))=\;&Q_{n1}^*Q_{n1}[((G_hD_n)A+(F_dD_n)B)^*T_{yy}(F_dD_n)+\\&T_y(F_dD_n)p^*(s)B^*D_n^*+p(s)D_n((G_hD_n)A+\\&(F_dD_n)B)^*T_y^T+(N_2-N_1)p^*(s)p(s)B^*D_n^*D_n]F_0F_0^*+\end{aligned}$$

$$W_{n1}^* W_{n1}(D_n^* D_n)^2 B^* p^*(s) p(s), \tag{16}$$

$$\begin{aligned} D_{c1}^* T - L(A_w D_n p(s) B) = {} & Q_{n1}^* Q_{n1}[((G_h D_n)A + (F_d D_n)B)^* T_{yy}(G_h D_n) + \\ & T_y(G_h D_n) B^* p^*(s) D_n^*] F_0 F_0^* + Q_{n2}^* Q_{n2}(F_p p(s) D_n)^* T_{uu} \times \\ & (F_p p(s) D_n) A^* D_n^* D_n + W_{n2}^* W_{n2} A^* B B^* (D_n^* D_n)^2 p(s) p^*(s), \end{aligned} \tag{17}$$

$$D_{c2}^* K_0 + L_0(A_w A_e) = Q_{n1}^* Q_{n1}[((G_h D_n)A + (F_d D_n)B)^* T_{yy} r_v + T_y r_v p^*(s) B^* D_n^*]E. \tag{18}$$

3)优化控制器的解

$$C_{01} = \frac{C_{n1}}{C_{d1}} = \frac{K}{T} e^{k_0 s}, C_{02} = \frac{C_{n2}}{C_{d2}} = \frac{D_n D_{c1}(K_0 e^{-\tau s} + A_w A_e X(s,\tau)) e^{\tau s}}{D_{c2} C_{d1} E}. \tag{19}$$

定理 1. 式(19)中的控制器使闭环系统内稳,并且闭环反馈系统的特征多项式 ρ_0、灵敏度 S_0、补灵敏度 $1-S_0$、控制灵敏度 M_0 分别为

$$\rho_0 = AC_{d1} + BH_f C_{n1} = D_{c1}, \quad S_0 = \frac{AT}{D_{c1}}, \quad 1 - S_0 = \frac{BK}{D_{c1}}, \quad M_0 = \frac{AK}{D_{c1}}. \tag{20}$$

证明见附录.

4 举例

考虑不稳定的非最小相位系统 $A(s)=(s-2)(s^2+s+1)$,$B(s)=s-3$. 取 $N_1=3$,$N_2=8$,$N_c=5$,$N_y=5$,$N_u=2$,$R_f(s)=1/(s+1)$,$E(s)=1$,$A_e=s$,$p(s)=s+1$,$A_w=s+3$,$D(s)=1$,$C(s)=1$;ζ,ξ,η 为相互独立的单位方差的白噪声. 各加权量分别为 $Q_{n1}=6.4957(s+1)/10^4$,$Q_{n2}=6.4957/10^4$,$W_{n1}=6.4957(s+2)/10^4$,$W_{n2}=6.4957(s+2)/10^4$. 求得控制器的参数分别为 $D_{c1}(s) = s^7 + 4.5617s^6 + 5.9759s^5 + 4.9704s^4 + 3.4908s^3 + 1.2725s^2 + 0.3128s + 0.0382$;$D_{c1}(s)$的特征根为$-3$,$-0.9999$,$-0.0307\pm0.7343i$,$-0.128\pm0.2829i$,$-0.2443$;$D_{c2}=0.7071s^6+3.5123s^5+5.9452s^4+6.7529s^3+5.0372s^2+2.3813s+0.5628$;$D_{c2}(s)$的特征根为$-3$,$-0.1718\pm0.8809i$,$-0.4909\pm0.5221i$,$-0.6414$;$K(s)=-103.34s^2-103.17s-103.68$,$T(s)=s^4+5.56s^3+12.54s^2+25.01s+155.5$;$T(s)$的特征根为$-3.7527\pm2.1949i$,$0.9720\pm2.6986i$. $L(s)=4s^6-10s^5-72s^4+466s^3-1778s^2+5811s-17951$,$K_0(s)=-0.059s-0.1327$,$L_0(s)=-0.0203s^5+0.0592s^4-0.0048s^3+0.0292s^2-0.0005s$. $X(s,\tau)=\sum_{i=1}^{6}\frac{k_i(e^{-\tau s}-e^{-\tau s_i})}{-s+s_i}$,$[k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6]=[0,-0.0003+0.0037i,-0.0003-0.0037i,0.0077+0.0177i,0.0077-0.0117i,0.0139]$,$[s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6]=[3,0.0281-0.7336i,0.0281+0.7336i,0.1051-0.2602i,0.1051+0.2602i,0.2084]$.

由图 1 得 $m(t)$对阶跃参考值 $r(t)=1$ 的噪声 $d_v(t)$和稳态响应值分别为

$$m_r(\infty) = \lim_{s\to0} s\frac{BD_n(K_0e^{-\tau s} + A_wA_eX(s,\tau))e^{\tau s}}{D_{c2}E}\frac{1}{s} = 1.0004, \quad m_d(\infty) = \lim_{s\to0} s\frac{BKD_n}{D_{c1}A}\varepsilon(s) = 0.$$

由此可得以下结论:本文在进行预测控制系统设计时,直接考虑噪声对系统的影响,使得系统的鲁棒性增强. 与其它预测控制算法相比,计算量稍增大,但可保证闭环系统内稳.

参 考 文 献

1 刘兵,徐立鸿,冯纯伯. 连续预测控制. 见:中国控制与决策会议文集. 1994,6

2 Zames G,Francis B A. A new approach to a classical frequency method:feedback and minimax sensitivity. In :CDC conference. San Diego,California,1982

3 Grimble M J. LQG predictive optimal controller for continuous-time system. *IEE Proc.-D*,1993,**140**:181—189

4 Grimble M J. Two-degree-of-freedom linear quadratic gaussian predictive control. *IEE Proc.-D*, 1995, **142**: 295－306

5 Demircioglu H, Gawthrop P J. Continuous-time generalized predictive control (CGPC). *Automatica*, 1991, **27**: 55－74

附　录

二自由度闭环系统的优化解

由式(7)，(8)，(10)，(12)整理式(13)，得

$$J = \frac{1}{2\pi j}\oint_D X(s)\mathrm{d}s, \tag{A1}$$

$$\begin{aligned} X(s) = &(Y_{c1}M_0Y_f - Y_{c1}^{*-1}\varphi_1 Y_f^{*-1})(Y_{c1}M_0Y_f - Y_{c1}^{*-1}\varphi_1 Y_f^{*-1})^* \\ &+ (Y_{c2}S_0C_{02}Y_r - Y_{c2}^{*-1}\varphi_2 Y_r^{*-1})(Y_{c2}S_0C_{02}Y_r - Y_{c2}^{*-1}\varphi_2 Y_r^{*-1})^* + \varphi_0, \end{aligned} \tag{A2}$$

$$Y_{c1} = \frac{D_{c1}}{A_wAD_n^2p(s)},\ Y_{c2} = \frac{D_{c2}}{A_wAD_n}, \tag{A3}$$

$$Y_f^*Y_f = H_f\Phi_{d_vd_v}H_f^* = \frac{D_n^*D_n}{A^*A},\ Y_rY_r^* = \Phi_{rr} = \frac{EE^*}{A_eA_e^*}, \tag{A4}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = &Q_1^*Q_1[(G_h + F_dW)^*T_{yy}F_d + p^*(s)W^*T_yF_d + (G_h + F_dW)^*T_y^Tp(s) \\ &+ (N_2 - N_1)p(s)W^*p^*(s)]F_{d0}\Phi_{d_vd_v}F_{d0}^* + W_1^*W_1\Phi_{d_vd_v}W^*, \end{aligned} \tag{A5}$$

$$\varphi_2 = Q_1^*Q_1[(G_h + F_dW)^*T_{yy}r_v + T_yr_vW^*p^*(s)]\Phi_{rr}. \tag{A6}$$

式中 φ_0 与控制器无关；D_{c1}，D_{c2} 满足式(14)，(15)；$T_{yy} = \int_{N_1}^{N_2}T_{N_y}^TT_{N_y}\mathrm{d}T$；$T_y = \int_{N_1}^{N_2}T_{N_y}\mathrm{d}T$；$T_{uu} = \int_0^{N_c}T_{N_u}^TT_{N_u}\mathrm{d}T$；取 $Y_f = D_n/A$，$Y_r = Ee^{-\tau s}/A_e$.

式(16)×B+(17)×A，整理得隐式方程

$$AT + BK = D_{c1}. \tag{A7}$$

令 $C_{01} = C_{n1}/C_{d1}$，$C_{02} = C_{n2}/C_{d2}$. 由 M_0 的定义及式(A3)，(A4)，(A7)，(16)，(18)，(A5)和式(A6)可得

$$Y_{c1}M_0Y_f - Y_{c1}^{*-1}\varphi_1Y_f^{*-1} = \left[\frac{TC_{n1}H_f - KC_{d1}}{A_wD_np(s)(AC_{d1} + BH_fC_{n1})}\right] - \frac{L}{D_{c1}^*}, \tag{A8}$$

$$Y_{c2}S_0C_{02}Y_r - Y_{c2}^{*-1}\varphi_2Y_2^{*-1} = \left[\frac{D_{c2}C_{n2}C_{d1}Ee^{-\tau s} - C_{d2}D_n(AC_{d1} + BH_fC_{n1})(K_0e^{-\tau s} + A_wA_eX(\tau,s))}{A_wA_eD_nC_{d2}(AC_{d1} + BH_fC_{n1})}\right] - \frac{N_0}{D_{c2}^*}, \tag{A9}$$

其中 $X(s,\tau) = \frac{L_0}{D_{c2}^*}e^{-\tau s} - \frac{N_0}{D_{c2}^*}$[3]，$\frac{N_0}{D_{c2}^*} = \sum_{i=1}^{m}\frac{k_ie^{-s_i\tau}}{(-s+s_i)}$，$k_i$ 满足 $\frac{L_0}{D_{c2}^*} = \sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{(-s+s_i)}$，$-s_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为 D_{c2} 稳定的特征根.

式(A8)，(A9)中 $AC_{d1}+BH_fC_{n1}$ 是期望稳定的闭环特征多项式，因此式(A8)方括号内项是稳定的，记为 T_{1s}，余项记为 T_{1u}. 式(A9)方括号内项记为 T_{2s}，余项记为 T_{2u}. 直观看 T_{2s} 不一定稳定，但在 T_{2s} 稳定条件下，C_{d2} 一定含有因子 C_{d1}，因此 T_{2s} 中不稳定项相抵消，后面可验证 T_{2s} 稳定的假设是合理的. 式(A1)变为

$$J = \frac{1}{2\pi j}\oint_D\left[\sum_{i=1}^{2}(T_{is}T_{is}^* + T_{iu}T_{iu}^* + T_{is}T_{iu}^* + T_{iu}T_{is}^*) + \varphi_0\right]\mathrm{d}s, \tag{A10}$$

因 $T_{is}T_{iu}^*$ 在 D 域内解析，故有 $\oint_D T_{is}T_{iu}^*\mathrm{d}s = 0$，$\oint_D T_{iu}T_{is}^*\mathrm{d}s = -\oint_D T_{is}T_{iu}^*\mathrm{d}s = 0$，而 $T_{iu}T_{iu}^*$，φ_0 与控制器无关，因此令 $T_{is}=0(i=1,2)$，则式(19)成立. 由式(19)和式(A7)容易推得式(20)成立.

致谢： 电力自动化研究院总工、中国工程院院士薛禹胜博士在本文修改过程中给予帮

助，特此感谢.

DUAL CRITERION BASED TWO-DEGREE-OF-FREEDOM PREDICTIVE CONTROL——CONTINUOUS-TIME CASE

LIU BING

(Institute of Systems, Electric Power Automation Research Institute, Nanjing 210003)

FENG CHUNBO

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract In this paper, the two-degree-of-freedom continuous-time predictive control is derived. A new cost function, including similar index function used in continuous-time predictive control, sensitivity function and complementary sensitivity function, is proposed. By factorizing general power spectrums and constructing appropriate Diophantine equations, the internal stability of closed-loop system is guaranteed. Finally an example shows the effectiveness of the method proposed here.

Key words Continuous-time predictive control, generalized spectral factorization, dual criterion.

刘 兵 1964 年生，1985 年毕业于河南大学，1996 年获东南大学博士学位，现为电力部电力自动化研究院系统所高级工程师. 目前研究兴趣电力系统的分析与控制等.

冯纯伯 1928 年生，中国科学院院士，俄罗斯自然科学院外籍院士，东南大学教授、博士生导师. 目前研究领域为系统建模、鲁棒控制、非线性控制等.