第24卷 第5期
1998年9月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 5
Sept., 1998

研究简报

Kalman-Yakubovich 引理与不确定性系统的鲁棒稳定性分析[1)]

陈阳舟 刘家琦
(哈尔滨工业大学航天学院 哈尔滨 150001)
陈善本
(哈尔滨工业大学材料科学与工程学院 哈尔滨 150001)

关键词 Kaman-Yakubovich 引理，不确定性系统，二次稳定性，频率判据.

1 引言

众所周知，频率域方法和时间域方法是控制系统研究中同等重要的两个基本方法，在不确定性系统的鲁棒稳定性分析与设计中也被广泛采用. 而这两种方法的互相渗透和联合使用促使人们希望建立起它们间的联系. 例如，文献[1]从几种典型的频率条件(如有界实性条件和正实性条件等)出发通过构造相应的二次型 Lyapunov 函数来确定使系统鲁棒渐进稳定的不确定性类的结构. 另一个典型例子是 Kalman - Yakubovich 引理(或称频率定理)[2]. 此引理已成为联系系统状态空间模型与频率条件的强有力工具. 本文的目的正是应用这个工具来讨论文献[1]中的类似问题.

2 问题的建立和一般结果

考虑由如下状态空间模型描述的不确定性系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + B\xi, \quad y = Cx + D\xi, \quad \xi = \Delta y, \quad \Delta = \in U, \tag{1}$$

这里 A,B,C,D 为给定的适当维数的矩阵，$x\in R^n$，$\xi\in R^m$，$y\in R^l$，Δ 为从 y 到 ξ 的任一传递算子，其结构由给定的不确定类 U 确定，假定 U 由时变非线性连续算子 $\phi(\cdot,t)$ 组成，而 $\phi(y,\cdot)$ 对任给的 $y\in R^l$ 为 Lebesque 可测函数，且使得$(x,\xi,=\phi(y,t))$满足二次型约束 $G(x,\xi):=x^* G_0 x+2x^* g\xi+\xi^*\Gamma\xi\leqslant 0$. 本文的问题是：寻找系统(1)关于 U 二次稳定的条件. 系统(1)关于类 U 二次稳定性如通常所定义：存在正定二次型$V(x)=x^* Hx$ 使得对类 U 中任意算子所确定的非零的(x,ξ)有 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t:=2x^* H(Ax+B\xi)<0$.

由二次稳定性定义和 S-过程定理[3]知系统(1)二次稳定当且仅当存在正定二次型

1)国家教委留学回国人员专项基金和国家自然科学基金资助项目.

收稿日期 1996－05－27

$V(x)=x^*Hx$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}-G(x,\xi):=2x^*H(Ax+B)-G(x,\xi)<0$$

$$(\forall x\in R^n,\xi\in R^m:|x|+|\xi|\neq 0)$$

成立. 以下总记 $\Omega_A=:\{\omega\in R^1:\det A_{i\omega}\neq 0\}$, $A_{i\omega}=:i\omega I-A$. 由著名的 Kalman-Yakubovich 引理[2]直接得到定理1.

定理1. 系统(1)关于不确定性类 U 二次稳定当且仅当同时满足下列两条件:(a)存在矩阵 k 使得 $A+Bk$ 为 Hurwitz 稳定且 $G(x,kx)\leqslant 0$;(b)成立频率条件:存在 $\varepsilon>0$使得对任意满足等式 $Ax+B\xi=i\omega x$ 的 $x\in C^n,\xi\in C^m,\omega\in\Omega_A$ 有

$$G(x,\xi)\geqslant\varepsilon(|x|^2+|\xi|^2).\tag{2}$$

特别,若 A 在虚轴上无特征根,则条件(2)变为 $G(A_{i\omega}^{-1}B,I)>0\quad(\forall\ \omega\in R^1)$.

3 系统(1)具有某些特殊二次型不确定类时的二次稳定性

本文讨论当不确定性类 U 为三类特定结构之一时系统(1)的二次稳定性. 在以下的叙述中总设 $T(\lambda)$为系统(1)的确定性部分的传递函数,即 $T(\lambda)=D+C(\lambda I-A)^{-1}B$.

首先,设不确定性类 U 中的二次型由 $\xi^*\xi\leqslant y^*y$ 确定,记该类为 U_1,则由定理1立即得到定理2.

定理2(小增益判据). 假定存在一个 $m\times l$ 常矩阵 F 使得 $F^*F\leqslant I$ 且 $A+B(I-FD)^{-1}FC$ 为 Hurwitz 稳定矩阵,则系统(1)关于不确定性类 U_1二次稳定的充分必要条件是频率条件成立

$$\exists\ \varepsilon>0:I-T^*(i\omega)T(i\omega)\geqslant\varepsilon[B^*(A_{i\omega}^{-1})^*A_{i\omega}^{-1}B+I]\quad(\forall\ \omega\in\Omega_A).$$

其次,考虑系统(1)的不确定性类 U 中的二次型由 $\xi^*y\leqslant 0$确定,记该类为 U_2,则由定理1即可得到定理3.

定理3(正实性判据). 设存在一个 $m\times m$ 常矩阵 F 使得 $F^*+F\leqslant 0$,且 $A+B(I-FD)^{-1}FC$ 为 Hurwitz 稳定矩阵,则系统(1)关于不确定性类 U_2二次稳定的充分必要条件是下面的频率条件成立

$$\exists\ \varepsilon>0:T^*(i\omega)+T(i\omega)\geqslant\varepsilon[B^*(A_{i\omega}^{-1})^*A_{i\omega}^{-1}B+I]\quad(\forall\ \omega\in\Omega_A).$$

最后,考虑不确定性类 U 中的二次型由$[\xi+K_1y]^*[\xi+K_2y]\leqslant 0$确定,记该类为 U_3,这里 K_1,K_2为两个给定的 $m\times l$ 常实矩阵,则由定理1得

定理4(圆判据). 假定矩阵 A 在虚轴上无特征根且类 U_3中存在一个线性函数 $\xi=Fy$ 使得 $A+B(I-FD)^{-1}FC$ 为 Hurwitz 稳定矩阵,则系统(1)关于不确定性类 U_3二次稳定的充分必要条件是下面的频率条件成立

$$\mathrm{Re}\{[I+K_1T(i\omega)]^*[I+K_2T(i\omega)]\}>0(\forall\ \omega\in R^1).$$

4 结束语

本文应用 Kalman-Yakubovich 引理讨论了几处具特殊结构的不确定性系统的二次稳定性. 获得的频率条件是系统二次稳定的充分必要条件,但仅仅是系统鲁棒渐进稳定的

充分条件. 其次,如果给定的不确定性类为文中所述各类的子类,则定理1—4中的条件都只能作为系统二次稳定的充分条件使用. 此时由于没有利用子类的更详细的信息,因而判据是保守的. 在作充分条件使用的意义下,定理2—4推广了文献[1]中相应的结果. 这是因为如果不确定类中不包括"$F=0$"情况,则不必要求矩阵 A 稳定,此时文献[1]中的频率条件不适用.

参　考　文　献

1 Haddad W M, Bernstein D S. Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle, and Popov theorems and their application to robust stability. In: Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control, England: Brighten, 1991, 2618—2623

2 Yakubovich V A. A frequency theorem in control theory (in Russian). *Sib. Mat. Zh.*, 1973, **14**:384—420; English transl. in *Siberian Math. J.*, 1973, **14**

3 Yakubovich V A. S-Procedure in nonlinear control theory (in Russian). *Vestnik Leningradskogo Universiteta, Ser. Mat*, 1971, **13**(1):62—77

KALMAN-YAKUBOVICH LEMMA AND ANALYSIS OF ROBUST STABILITY FOR SYSTEMS WITH UNCERTAINTIES

CHEN YANGZHOU　LIU JIAQI　CHEN SHANBEN[1]

(*School of Astronuatics*,[1] *School of Material Science and Eng.*,

Harbin Institute of Technology, *Harbin* 150001)

Key words Kalman-Yakubovich lemma, systems with uncertainties, quadratic stability, frequency criterion.

(上接第698页)

2. 文章结构请参照本刊近期发表的文章格式,论文摘要限制在200字左右,其内容包括研究目的、方法、结果和结论等. 文中非标准缩写词(中文或英文)须在首次出现时定义清楚,公式、图、表均须分别用阿拉伯数字全文统一编号.

3. 计量单位一律采用法定计量单位,即 SI 单位,名词术语必须规范化　标准化,前后一致. 外国人名、地名、书刊名称除已通用者外一律用原文.

4. 参考文献按文中出现的先后次序排列. 期刊的格式为:编号　作者(姓在前,如 Wiener L N, Kalmn R E, Wang H 等). 文章题目. 期刊名(外文可根据国际惯例使用缩写词),年,卷号(期号);页码顺序编排. 图书的格式为:编号　作者(姓在前). 书名. 出版地点:出版者,年份,页码顺序编排. 正文未引用的文献及未公开发表的文献不得列入参考文献栏目.

5. 文末附英文摘要(内容与中文一致). 摘要包括英文标题、作者姓名和工作单位、文章摘要、关键词,摘要一般不超过250个单词.

6. 来稿最好用方正打印,打印稿请用四号字,行间空距不小于7毫米. 文中符号、大小写等必须清楚.