第24卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 24, No. 5
1998年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 1998

研究简报

连续时间回归网络的稳定性分析

张兰玲 刘贺平 孙一康
(北京科技大学自动化系 北京 100083)

关键词 连续回归神经网络，渐近稳定，绝对稳定.

1 引言

回归网络稳定性的分析大多是采用李亚普诺夫直接法[1]，这种方法的关键在于李亚普诺夫函数的选择，由于目前还没有系统地构造李亚普诺夫函数的方法，用直接法分析网络的稳定性无疑是比较困难的. 本文基于 Gersgorin 定理，以一类连续回归神经网络为例，讨论网络渐近稳定和绝对稳定的充分条件，这种方法通过对网络参数的简单运算判断网络的稳定性.

2 平衡点的存在性及变换

本文研究如下形式的连续回归神经网络

$$\dot{\boldsymbol{y}} = -A\boldsymbol{y} + \sigma(W\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{i}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{y}=[y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t)]^T\in R^n$ 为神经元的状态矢量，$\sigma(\cdot)$是 tanh 函数，$A=\mathrm{diag}[a_1,a_2,\cdots,a_n]\in R^{n\times n}$是常值矩阵($a_i>0,i=1,\cdots,n$)，$\boldsymbol{i}=[I_1,I_2,\cdots,I_n]^T\in R^n$ 为神经元的外部常值输入矢量，$W=[w_{i,j}]_{n\times n}\in R^{n\times n}$是网络的连接权矩阵.

设 $\boldsymbol{y}_e$ 为神经网络系统(1)的一个平衡点，则

$$\boldsymbol{y}_e = A^{-1}\sigma(W\boldsymbol{y}_e) + A^{-1}\boldsymbol{i}. \tag{2}$$

定义映射 $\phi(\boldsymbol{y})=A^{-1}\sigma(W\boldsymbol{y})+A^{-1}\boldsymbol{i}$，若 $\boldsymbol{y}^*$ 为映射 ϕ 的一个不动点，则

$$\boldsymbol{y}^* = A^{-1}\sigma(W\boldsymbol{y}^*) + A^{-1}\boldsymbol{i}. \tag{3}$$

比较(2)，(3)两式可见，映射 ϕ 的不动点即为神经网络系统(1)的平衡点.

引理1. (布劳韦尔不动点定理)[2]设 $H^n=[a,b]^n$ 为 R^n 的闭集，$f:H^n\rightarrow H^n$ 是一个连续函数，则 f 在 H^n 中至少有一个不动点.

定理1. 考虑神经网络动态系统(1)，对于任意的外部输入 $\boldsymbol{i}$，常值矩阵 A 及连接矩阵 W，在 R^n 中构造闭集 $K=\{\boldsymbol{y}:\|\boldsymbol{y}-A^{-1}\boldsymbol{i}\|_\infty\leqslant|\|A^{-1}\||_\infty\cdot T,(T=\max\limits_i\sup\limits_u|\sigma_i(u)|\}$，则系统在 K 中至少有一个平衡点.

收稿日期 1996-09-26

证明. 由映射 ϕ 及 T 的定义可得

$$\|\phi(y) - A^{-1}i\|_\infty \|\|A^{-1}\sigma(Wy)\|_\infty \leqslant |\|A^{-1}\||_\infty \cdot \|\sigma(Wy)\|_\infty \leqslant |\|A^{-1}\||_\infty \cdot T. \tag{4}$$

由 $\sigma(Wy)$ 的连续性、K 的定义及引理1可知，ϕ 在 K 中至少有一个不动点，即系统(1)在 K 中至少有一个平衡点.

分析系统的稳定性时，对不为0的平衡点，首先要进行变换.

设 $y_e=[y_{1e},y_{2e},\cdots,y_{ne}]^T$ 为系统(1)的一个平衡点，令 $z=y-y_e$, $g(Wz)=\sigma(Wy)-\sigma(Wy_e)$, $o=Wz=[o_1,o_2,\cdots,o_n]^T$，则

$$\dot{z} = f(z) = -Az + g(Wz) = -Az + g(o), \tag{5}$$

则系统(5)的平衡点 $z=0$ 与系统(1)的平衡点 y_e 相对应.

3 连续回归网络的渐近稳定性

引理2. (Gersgoring 定理)[3]设 $B=[b_{ij}]\in M_n$，(M_n 为 $n\times n$ 的复矩阵集合)，又设 $R_i(B)=\sum_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{n}|b_{ij}|$，$(1\leqslant i\leqslant n)$表示 B 的各去心绝对行和，则 B 的所有特征值 s 都位于 n 个圆盘的并 $\bigcup_{i=1}^{n}\{s\in C: |s-b_{ij}|\leqslant R_i(B)\}$ 中，(C 为复数域). 又若 $|b_{ij}|+R_i(B)<1(1\leqslant i\leqslant n)$，则 B 的所有特征值 s 都位于单位圆内.

引理3. [4]对于非线性自治系统 $\dot{x}=f(x)$，假设 $f(0)=0$，且 f 连续可微，定义 $D=\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{X=0}$，若 D 的所有特征值均具有负实部，则平衡点0是渐近稳定的.

定理2. 对于神经网络动态系统(1)，设 y_e 是它的一个平衡点，若网络的连接权满足 $\sum_{j=1}^{n}|w_{i,j}|<a_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$则平衡点 y_e 渐近稳定.

证明. 先考虑神经网络动态系统(5)，其雅可比矩阵 J 为

$$J_{Z=0} = \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{z=0} = \begin{bmatrix} -a_1 + g'(o_1)w_{1,1} & g'(o_1)w_{1,2} & \cdots & g'(o_1)w_{1,n} \\ g'(o_2)w_{2,1} & -a_2 + g'(o_2)w_{2,2} & \cdots & g'(o_2)w_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g'(o_n)w_{n,1} & g'(o_n)w_{n,2} & \cdots & -a_n + g'(o_n)w_{n,n} \end{bmatrix}.$$

设 $r(s)$ 为特征值 s 的实部，由引理2得

$$r(s) \leqslant J_{ij} + R_i(J) = -a_i + g'(o_i)w_{i,j} + g'(o_i)\sum_{\substack{j=1\\j\neq 1}}^{n}|w_{ij}| = -a_i + \sum_{j=1}^{n}|w_{ij}|$$

$$\because \sum_{j=1}^{n}|w_{ij}| < a_i, \qquad (i = 1,2,\cdots,n),$$

$$\therefore r(s) < 0.$$

由引理3及对应关系易知，系统(1)的平衡点 Y_e 渐近稳定.

4 连续回归网络的绝对稳定性

定义1[1]. 考虑神经网络系统(1)，若对任意的外部输入 i，确定的常值矩阵 A 及连接

矩阵 W,系统只有唯一的渐近稳定的平衡点,则称系统绝对稳定.

引理4. [5]设 $H^n=[a,b]^n$ 为 R^n 的闭集,$f:H^n\to H^n$ 是一个连续函数,若 $f(\boldsymbol{x})$雅可比矩阵的特征值均在单位圆内,则 f 是压缩映射,这时,$f(\boldsymbol{x})$在 H^n 中只有唯一的不动点.

定理3. 考虑神经网络系统(1),对于任意的外部输入 I,常值矩阵 A 及连接矩阵 W,K 的定义同定理1,若 $\boldsymbol{y}_e$ 为系统的一个平衡点,则 $\boldsymbol{y}_e\in K$.

由(3)式及 K 的定义可知结论成立.

定理4. 考虑神经网络系统(1),对于任意的外部输入 $\boldsymbol{i}$,确定的常值矩阵 A,若网络的连接权满足 $\sum_{j=1}^{n}|w_{ij}|<a_i(i=1,2,\cdots,n)$,则系统只有唯一一个平衡点.

证明. 映射 ϕ 的雅可比矩阵 L 为

$$L=\left[\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]=\begin{bmatrix}\frac{\sigma'(x_1)}{a_1}\cdot w_{1,1} & \frac{\sigma'(x_1)}{a_1}\cdot w_{1,2} & \cdots & \frac{\sigma'(x_1)}{a_1}\cdot w_{1,n}\\ \frac{\sigma'(x_2)}{a_2}\cdot w_{2,1} & \frac{\sigma'(x_2)}{a_2}\cdot w_{2,2} & \cdots & \frac{\sigma'(x_2)}{a_2}\cdot w_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\sigma'(x_n)}{a_n}\cdot w_{n,1} & \frac{\sigma'(x_n)}{a_n}\cdot w_{n,2} & \cdots & \frac{\sigma'(x_n)}{a_n}\cdot w_{n,n}\end{bmatrix},$$

$$|L_{ii}|+R_i(L)=\frac{\sigma'(x_i)}{a_i}\cdot|w_{i,j}|+\frac{\sigma'(x_i)}{a_i}\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|w_{i,j}|\leqslant\frac{1}{a_i}\cdot\sum_{j=1}^{n}|w_{ij}|.$$

若 $$\sum_{j=1}^{n}|w_{ij}|<a_i,\qquad(i=1,2,\cdots,n),$$

则 $$|L_{ii}|+R_i(L)<1\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

由引理2、引理4得 $\phi(\boldsymbol{y})$在 K 上只有一个不动点,即系统(1)在 K 上只有一个平衡点,结合定理3可知,系统只有唯一一个平衡点.

定理5. 考虑神经网络系统(1),对于任意的外部输入 $\boldsymbol{i}$,确定的常值矩阵 A,若网络的连接权满足 $\sum_{j=1}^{n}|w_{ij}|<a,(i=1,2,\cdots,n)$,系统绝对稳定.

由定理2、4及定义1可证结论成立.

5 结论

本文采用 Gersgorin 定理讨论了连续回归神经网络渐近稳定及绝对稳定的充分条件.该方法通过对网络的连接权进行简单计算来判定网络的稳定性,是一种通用的简单、方便的分析方法,具有实际应用价值.

参考文献

1 Matsuoka K. Stability conditions for nonlinear continuous neural networks with asymmetric connection weights. *Neural Networks*, 1992, **5**(3): 495—500

2 Devaney R L. An Introduction to Chaotic Dynamic Systems. Addison-Wesley publishing company, 1984

3 合恩 R A,约翰逊 C A. 矩阵分析. 天津:天津大学出版社,1989,杨奇译

4 Vidyasagar M. Nonlinear Systems Analysis. Englewood Cliffs. Newjersey: Prentice-Hall Inc, 1978

5 Jin L, Nikiforuk P N, Gapta M M. Absolute stability conditions for discrete-time recurrent neural networks. *IEEE Trans. Neural Networks*, 1994,**5**(6): 954—963

STABILITY ANALYSIS FOR CONTINUOUS-TIME RECURRENT NEURAL NETWORKS

ZHANG LANLING LIU HEPING SUN YIKANG

(*Department of Automation, Beijing University of Science and Technology, Beijing* 100083)

Key words Continuous-time recurrent neural network, asymptotic stability, absolute stability.

《自动化学报》征稿简则

一、《自动化学报》是中国自动化学会和中国科学院自动化所主办的全国性高级学术期刊,双月刊.在美国出版英译版,季刊.

二、本刊刊载自动化科学与技术领域的高水平理论性和应用性学术论文.内容包括:1.自动控制理论;2.系统理论与系统工程;3.自动化技术及其在国民经济各领域中的创造性应用;4.自动化系统计算机辅助技术;5.机器人与自动化;6.人工智能与智能控制;7.自动控制系统中的新概念、新原理、新方法、新设计;8.自动化学科领域的其它重要问题.

三、本刊以发表论文和短文为主,并不定期地发表长论文、综述文章、问题讨论、书刊评论、国内外学术活动信息等.

四、本刊不接受已在国内外期刊上发表(包括待发表)的稿件,但不排除已在国内外学术会议上发表或准备发表的优秀论文(对于此种情况,作者必须在稿件首页脚注说明).

五、稿件内容的正确性、真实性和可靠性由作者自行负责.

六、来稿一式三份寄北京中关村中国科学院自动化所《自动化学报》编辑部.邮编100080.编辑部在收稿后一周内寄送回执.作者请自留底稿,稿件概不退还.稿件是否录用一般在半年内通知作者.

七、稿件刊登与否由本刊编委会最后审定,已被录用的稿件需严格按审查意见和《作者加工稿件须知》修改并一式两份寄编辑部.

八、编委会有权对来稿作适当文字删改或退请作者修改.文章发表后,按篇酌致稿酬,并赠送30本抽印本,在稿件的修改及联系过程中,如果不特殊说明,本刊只与第一作者联系.

九、来稿格式及要求:

1.来稿要求论点明确,论证严格,语言通顺,文字简练,一般定稿时长论文12000字;普通论文尽量不超过6000字;短文不超过3000字;其它形式文章视具体内容由编辑部决定.

(下转717页)