第24卷 第6期
1998年11月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 6
Nov., 1998

短文

关于区间矩阵稳定性、可控性、可观性的充要条件的注记[1)]

廖晓昕
（华中理工大学自动控制系 武汉 430074）
罗 琦
（武汉冶金科技大学基础部 武汉 430081）
梅正扬 胡伟湘
（华中理工大学数学系、自动控制系 武汉 430074）

摘 要 该文是对区间矩阵稳定性、可观性及可控性的充要条件的若干注记，给出其併算子 $\bigcup$ 的明确定义以及一个大区间矩阵分解成若干个子矩阵之併的具体表达式. 并进一步说明一个区间矩阵（无穷多个矩阵）的稳定性、可控性、可观性等价于该区间矩阵中的有限个矩阵的相应性质. 建议了寻找这有限个矩阵的计算方法和步骤.

关键词 区间矩阵，Hurwitz 稳定性，Schur 稳定性，可控性，可观性.

1 引言

近十多年来，控制理论和应用中的 Robustness 问题是一个极活跃的研究课题，各种 Robustness 的概念相继提出，Khortionov[1]给出了区间多项式的 Hurwitz 稳定等价于四个端点多项式的 Hurwitz 稳定的结果，开辟了研究区间动力系 Robust 稳定性的先河. 人们曾猜想：大概区间矩阵的 Hurwitz 稳定性、Schur 稳定性也有类似结果. 然而后人不断有反例否定了这种猜想. 所以，究竟无穷多个矩阵构成的区间矩阵与该区间内有限多个矩阵稳定性是否等价？如等价，又将如何寻找这有限个矩阵，这就成为人们极关注的问题.

Kaining W 等人[2]把一个区间矩阵 $[A^m\ A^M]:=[\underline{A}\quad \overline{A}]$ 分解为 k 个子区间矩阵 $[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i]$ 之併，即

$$[\underline{A}\quad \overline{A}]=\bigcup_{i=1}^{k}[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i], \tag{1}$$

然后给出每个子区间矩阵 $[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i]$ 为 Hurwitz[Schur]稳定的充分条件，进而得到如下定理.

定理1. $[\underline{A}\quad \overline{A}]$ 为 Hurwitz[Schur]稳定的充分条件是每个 $[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i]$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 是 Hurwitz[Schur]稳定的.

1）国家自然科学基金、国家教委博士点专项科研基金资助课题.
收稿日期 1996-12-12

此后,Kaining W 等人[2]把这种方法推广到区间定常线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=[\underline{A}\quad \overline{A}]x(t)+Bu(t),\\ y(t)=C^{\mathrm{T}}x(t)+D^{\mathrm{T}}u(t).\end{cases}\tag{2}$$

用同样的方法,令

$$[\underline{A}\quad \overline{A}]=\bigcup_{i=1}^{k}[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i],$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i]x(t)+Bu\quad (i=1,2,\cdots,k),\\ y(t)=C^{\mathrm{T}}x(t)+D^{\mathrm{T}}u(t),\end{cases}\tag{3}$$

进而证明了(2)式可控、可观分别等价于(3)式的每一个的可控、可观.

这里,一个核心问题是如何分解?併算子的定义是什么?与一般矩阵的加法运算有何异同?这些关键概念,文中未交代清楚.根据文中采用矩阵加法的方法来分解,人们自然理解矩阵的併为矩阵的加法运算.例如

$$\underline{A}=\begin{pmatrix}-2 & -0.5\\ -3 & -1\end{pmatrix},\quad \overline{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix},\quad A_0=\frac{1}{2}(\underline{A}+\overline{A})=\begin{pmatrix}-1.5 & -0.25\\ -2.5 & -1\end{pmatrix}.$$

现将$[\underline{A}\quad \overline{A}]$分为四个子区间矩阵,得

$$[\underline{A}_1\quad \overline{A}_1]=\begin{pmatrix}[-2\quad -1.75] & [-0.5\quad -0.375]\\ [-3\quad -2.75] & -1\end{pmatrix},$$

$$[\underline{A}_2\quad \overline{A}_2]=\begin{pmatrix}[-1.75\quad -1.5] & [-0.375\quad -0.25]\\ [-2.75\quad -2.5] & -1\end{pmatrix},$$

$$[\underline{A}_3\quad \overline{A}_3]=\begin{pmatrix}[-1.5\quad -1.25] & [-0.25\quad -0.125]\\ [-2.50\quad -2.25] & -1\end{pmatrix},$$

$$[\underline{A}_4\quad \overline{A}_4]=\begin{pmatrix}[-1.25\quad -1] & [-0.125\quad 0]\\ [-2.25\quad -2] & -1\end{pmatrix}.$$

故有

$$[\underline{A}\quad \overline{A}]=\bigcup_{i=1}^{4}[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i].$$

不难验证,每个$[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i]$是 Hurwitz 稳定的,但$[\underline{A}\quad \overline{A}]$则不然.又如

$$\begin{aligned}[\underline{A}\quad \overline{A}]:=&\begin{pmatrix}-0.2 & [-0.4\quad 0.05]\\ [-0.5\quad 4] & 0.6\end{pmatrix}=\\ &\begin{pmatrix}-0.2 & [-0.4\quad -0.2875]\\ [-0.5\quad 0.625] & 0.6\end{pmatrix}\cup\\ &\begin{pmatrix}-0.2 & [-0.2875\quad -0.175]\\ [0.625\quad 1.75] & 0.6\end{pmatrix}\cup\\ &\begin{pmatrix}-0.2 & [-0.175\quad -0.0625]\\ [1.75\quad 2.875] & 0.6\end{pmatrix}\cup\\ &\begin{pmatrix}-0.2 & [-0.0625\quad -0.05]\\ [2.875\quad 4] & 0.6\end{pmatrix}:=\bigcup_{i=1}^{4}[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i],\end{aligned}$$

可以验证每个$[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i]$是 Schur 稳定的,但$[\underline{A}\quad \overline{A}]$则不然.

2　併算子$\cup$的明确定义

由前面分析可看出,必须给併算子$\cup$一个明确的定义. 显然,

$$[\underline{A}\quad \overline{A}] = [a_{ij} \big| \underline{a}_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant \bar{a}_{ij} \quad i,j = 1,2,\cdots,n]$$

与 $R^{n\times n}$中的一个紧集[有界闭集]$\Omega=\{x_{ij} \big| \underline{a}_{ij}\leqslant x_{ij}\leqslant \bar{a}_{ij} \quad i,j=1,2,\cdots,n\}$对应.

定义1.　将$[\underline{A}\quad \overline{A}]$分解为 k 个子区间矩阵$[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i]$之併

$$[\underline{A}\quad \overline{A}] = \bigcup_{i=1}^{k}[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i], \tag{4}$$

称为一个完全分解. 若$\forall\ A\in[\underline{A}\quad \overline{A}]$必$\exists\ i_0\in[1,\cdots,k]$,使得 $A\in[\underline{A}_{i_0}\quad \overline{A}_{i_0}]$.

有了以上明确的定义,则文[2,3]的主要定理便是显然的,因此有以下命题.

命题.　将$[\underline{A}\quad \overline{A}]$作完全分解$[\underline{A}\quad \overline{A}]=\bigcup_{i=1}^{k}[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i]$,则

1) $[\underline{A}\quad \overline{A}]$是 Hurwitz[Schur]稳定的等价于每个$[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i]$　$(i=1,\cdots,k)$是 Hurwitz [Schur]稳定的;

2) 区间线性系统(2) 可控(可观)当且仅当每个子区间线性系统(3)可控(可观).

因为$\forall A\in[\underline{A}\quad \overline{A}]$具有某性质$\Leftrightarrow A\in[\underline{A}_{i_0}\quad \overline{A}_{i_0}]$具有某性质.

3　无穷个矩阵与有限个矩阵的等价性

上述命题的结论仍不够理想,因为每个小区间矩阵仍有无穷多个矩阵. 人们感兴趣的是$[\underline{A}\quad \overline{A}]$的稳定性、可控性和可观性是否与有限个矩阵相应的性质等价,这正是 Robustness 问题研究的核心所在. 答案是肯定的.

设 $\mathrm{Re}\lambda(A)$表示矩阵 A 的特征值的实部,$\rho(A)$表示矩阵 A 的谱半径. A 的 Hurwitz [Schur]稳定性分别用 $\mathrm{Re}\lambda(A)<0$和 $\rho(A)<1$来描述的,是“粗”性质(不等式)不是临界性质(等式),而 $\mathrm{Re}\lambda(A)$和 $\rho(A)$又连续依赖于 A 的元素 a_{ij},故 $\mathrm{Re}\lambda(A)<0$和 $\rho(A)<1$具有一定的 Robust 度,即若 $\mathrm{Re}\lambda(A)<0[\rho(A)<1]$必$\exists\ \delta>0$. 当$\|\Delta A\|<\delta$,有 $\mathrm{Re}\lambda(A+\Delta A)<0[\rho(A+\Delta A)<1]$,而 A 与 $x\in\Omega$ 一一对应,故存在 x 的一个开邻域,使得此邻域内任何一点 $\hat{x}$ 对应的 $\hat{A}$ 也具有 $\mathrm{Re}\lambda(\hat{A})<0[\rho(\hat{A})<1]$. 因此,根据泛函分析中著名的 Berel 有限覆盖定理,存在有限个这样的开邻域完全覆盖了 Ω,即存在$[\underline{A}\quad \overline{A}]$的完全分解,使$[\underline{A}\quad \overline{A}]=\bigcup_{i=1}^{k}[\underline{A}_i\quad \overline{A}_i]$.

4　如何寻找有限个矩阵

如何以较快的速度、尽可能少的计算量找到尽可能少的有限个矩阵,使得它们的稳定性、可控性和可观性蕴涵整个区间矩阵相应的性质是很有实际意义的. 我们仅以 Hurwitz 稳定性来论述,至于 Schur 稳定性、可控可观性的验证是类似的,故略.

文[2,3]的方法是从大到小,先就整个区间矩阵的中点矩阵 A_0,用解 Lyapunov 矩阵方程的方法验证 A_0的 Hurwitz 稳定性及稳定度,视其它矩阵为 A_0的扰动矩阵,看是否在

稳定度所允许的扰动范围内;若不是,便进行分解.这种方法的弊端是每次算出 A_0的稳定性、稳定度的难得结果只是用来决定下一次是否再分解,没有充分发挥它的作用.

我们的方法是从小到大,先分解,哪怕分解很细,都是简易可行的.而验证一个矩阵的稳定性、稳定度则难多了.故一方面要尽可能减少这种验证的次数,另一方面把已获得的稳定性、稳定度结果最大限度地充分利用起来,即删去被稳定矩阵的 Robust 度所能覆盖的小区间矩阵.这样,每一次计算都是有成效的.每一次都或多或少能删去一些小区间、矩阵,直到删完为止.

先验证一条引理.

引理. 设$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax$ 的解满足

$$\|x(t)\| \leqslant Me^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0, M \geqslant 1, \tag{6}$$

即 A 为 Hurwitz 矩阵.如果扰动方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(A+\Delta A)x$ 满足$\|\Delta A\|<\frac{\alpha}{M}$,则 $A+\Delta A$ 仍然是 Hurwitz 矩阵.

证明. 由常数变易法,后一方程的解可表示为

$$x(t) = x(t,0,x_0) = x_0e^{At} + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\Delta Ax(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

$$\|x(t)\| \leqslant M\|x_0\|e^{-\alpha t} + Me^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}\|\Delta A\|\|x(\tau)\|\mathrm{d}\tau,$$

$$\|x(t)\|e^{\alpha t} \leqslant M\|x_0\| + M\|\Delta A\|\int_0^t e^{\alpha\tau}\|x(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

由 Gronwall-Bellman 不等式有$\|x(t)\|e^{\alpha t}\leqslant M\|x_0\|e^{M\|\Delta A\|t}$,故

$$\|x(t)\| \leqslant M\|x_0\|e^{(M\|\Delta A\|-\alpha)t}. \tag{8}$$

由条件知$(A+\Delta A)$是 Hurwitz 矩阵. 证毕.

验证$[\underline{A}\quad \overline{A}]$为 Hurwitz 稳定的方法如下:

第1步.将$[\underline{a}_{ij}\quad \overline{a}_{ij}]$分为 k_{ij}个等分区间

$$\left[\underline{a}_{ij}\quad \underline{a}_{ij}+\frac{\overline{a}_{ij}-\underline{a}_{ij}}{k_{ij}}\right],\left[\underline{a}_{ij}+\frac{\overline{a}_{ij}-\underline{a}_{ij}}{k_{ij}}\quad \underline{a}_{ij}+\frac{2(\overline{a}_{ij}-\underline{a}_{ij})}{k_{ij}}\right],\cdots,$$

$$\left[\underline{a}_{ij}+\frac{(k_{ij}-1)(\overline{a}_{ij}-\underline{a}_{ij})}{k_{ij}}\quad \overline{a}_{ij}\right],\quad i,j=1,2,\cdots n,$$

简记为

$$[\underline{a}_{ij}^{(1)}\quad \overline{a}_{ij}^{(1)}],[\underline{a}_{ij}^{(2)}\quad \overline{a}_{ij}^{(2)}],\cdots,[\underline{a}_{ij}^{(k_{ij})}\quad \overline{a}_{ij}^{(k_{ij})}],\quad i,j=1,2,\cdots,n, \tag{9}$$

则可将$[\underline{A}\quad \overline{A}]$进行完全分解为

$$[\underline{A}\quad \overline{A}]=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n}\bigcup_{l=1}^{k_{ij}}[\underline{a}_{ij}^{(l)}\quad \overline{a}_{ij}^{(l)}]=\bigcup_{k=1}^{k_{11}\times k_{12}\times\cdots\times k_{nn}}[\underline{A}_k\quad \overline{A}_k]; \tag{10}$$

第2步.记$[\underline{a}_{ij}\quad \overline{a}_{ij}]$的两个黄金分割点为$\underline{b}_{ij},\overline{b}_{ij}$,验证 $\underline{B}:=(\underline{b}_{ij})$是否为 Hurwitz 矩阵;若是,设$\|e^{\underline{B}t}\|\leqslant M_1e^{-\alpha_1 t}\quad (M_1\geqslant 1,\alpha_1>0)$,根据引理,若$\|\Delta\underline{B}\|<\frac{\alpha_1}{M_1}$,则 $\underline{B}+\Delta\underline{B}$ 也是 Hurwitz 矩阵;

第3步.删去(10)式中被 $\underline{B}+\Delta\underline{B}$ 及 $\overline{B}+\Delta\overline{B}$ 所覆盖的所有子区间矩阵,然后对$[\underline{a}_{ij}\quad \underline{b}_{ij}]$,$[\underline{b}_{ij}\quad \overline{b}_{ij}]$,$[\overline{b}_{ij}\quad \overline{a}_{ij}]$中尚未被删去的矩阵进行类似于第2步的处理;继续下去,通过有限步,便可把(10)式的所有子区间删完,若遇到某一个矩阵不是 Hurwitz 矩阵,立即可断

言$[\underline{A}\quad \overline{A}]$不是 Hurwitz 矩阵.

注1. 如取 $\underline{b}_{ij}$,$\overline{b}_{ij}$不方便,可取最接近 $\underline{b}_{ij}$,$\overline{b}_{ij}$的 $\underline{a}_{ij}^{(l)}$,$\overline{a}_{ij}^{(l)}$代之.

注2. 第二步也可采用求 Lyapunov 矩阵方程 $P\underline{B}+\underline{B}^{\mathrm{T}}P=-I_n$ 的对称正定解 P,求出 $\Delta\underline{B}$,使之$\|P\Delta\underline{B}+\Delta\underline{B}^{\mathrm{T}}P\|<1$. 然后删去(10)式被 $\underline{B}+\Delta\underline{B}$ 所覆盖的所有子区间矩阵,如此类推.

参 考 文 献

1 Khartionov V L. Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of system of linear differential equation. *Differential'nye Uravnessiya*. 1987,**14**(11):1843—1845

2 Kaining W, Anthong N M, Derong L. Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994,**39**:1251—1255

3 Kaining W, Anthong N Michel. Necessary and sufficient conditions for the controllability and observability of a class of linear time-invarint systems with interval plants. *IEEE trans. Autom. Control*, 1994,**39**:1443—1447

4 黄　琳,秦化淑,郑应平,郑大钟. 复杂控制系统理论构想与前景. 自动化学报,1993,**19**(2):129—137

5 廖晓昕. 区间动力系统 Robust 稳定性进展. 数学进展,1992,**21**(2):165—184

NOTES ON NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS OF STABILITY, OBSERVABILITY AND CONTROLLABILITY FOR INTERVAL MATRICES

LIAO　XIAOXIN

(*Dept. of Auto. Control, Huazhong Univ. of Sci. & Tech., Wuhan*　430074)

LUO　QI

(*Dept. of Math., Wuhan Yejin Univ. of Sci. & Tech., Wuhan*　430081)

MEI ZHENGYANG　　HU WEIXIANG

(*Dept. of Math. & Auto. Control, Huazhong Univ. of Sci. & Tech., Wuhan*　430074)

Abstract　This paper is a note on the necessary and sufficient conditions of stability[1], observability and controllability[2] for interval matrices. An explicit definition of the union operator "U" is given, and an interval matrix can be expressed concretely as the union of its sub-interval matrices. It is illustrated that the property of stability, observability and controllability of an interval matrix (i. e., a family of infinite number of matrices) is equivalent to the corresponding property of certain finite number of matrices. Also, an approach to seek the sub-interval matrices is proposed.

Key words　Interval matrix, Hurwitz stability, Schur stability, controllability, observability.