第24卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 24, No. 6
1998年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1998

短文

# 双线性系统反馈线性化鲁棒控制的新方法

方洋旺 韩崇昭
(西安交通大学系统工程研究所 西安 710049)

**摘 要** 研究了单输入的双线性系统的精确线性化及其鲁棒控制器设计问题,避免了用微分几何的李导数、李括号的复杂运算,只用纯代数的方法给出了一般单输入双线性系统精确线性化的充分条件. 同时,在非线性不确定的条件下,讨论了双线性系统精确线性化的鲁棒控制器的设计问题.

**关键词** 双线性系统,精确线性化,不确定性,鲁棒控制.

## 1 引言

近年来,利用微分几何方法对非线性系统进行研究得到广泛的重视[1—3,5,8,9],通过坐标变换及状态反馈将非线性系统精确线性化来处理非线性系统也得到了成功的应用. 而对于一般的单输入非线性系统,用 Carleman 线性化方法[10],可以用双线性系统来充分逼近它. 此外,用 Vollterra 级数表示的非线性系统,在一定条件下,可获得双线性系统的实现[10]. 因此,在非线性系统的研究中,双线性系统起着十分重要的作用. 然而,在实际系统中,对象不可避免地存在建模不确定性及参数的确定性. 因此,对具有不确定的非线性系统设计鲁棒控制器来处理不确定性就成了很重要的课题.

由于要判断一般非线性系统是否可精确线性化,要用到微分几何的李导数、李括号运算,且一般还要解偏微分方程[8,9],这在实际中很难应用. 在本文中,避免用微分几何方法,而是用纯代数方法给出了判别一般单输入双线性系统的精确线性化的充分条件.

## 2 预备知识

考虑单输入不确定的双线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) + [(D\boldsymbol{x} + B) + \Delta \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{u} \tag{1}$$

和标称系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + (D\boldsymbol{x} + B)\boldsymbol{u}, \tag{2}$$

其中 $A \in R^{n\times n}, D \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times 1}, \boldsymbol{u} \in R, \widetilde{D} = [D \quad B]$.

**假设1.** $\Delta \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \widetilde{D}\,\widetilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}), \Delta \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \widetilde{D}\widetilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x})$, 且 $\widetilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}) \leqslant \sigma_1(\boldsymbol{x}), \widetilde{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{x}) \leqslant \sigma_2(\boldsymbol{x})$.
这里$\|\cdot\|$表示欧式范数,$\sigma_1(\boldsymbol{x}), \sigma_2(\boldsymbol{x})$为已知正函数,

**定义1.**[12] 若对应于 $A$ 的不同特征根的若干块只有一个子块,称矩阵 $A$ 为不降阶

收稿日期 1996-11-15

矩阵.

**引理1.** $A$ 为不降阶矩阵$\Leftrightarrow$对应于 $A$ 的不同特征根的特征子空间的维数为1维的(证明略).

**引理2.**[12] $A$ 为不降阶矩阵$\Leftrightarrow$存在向量 $\boldsymbol{v}$,使 $\mathrm{rank}[\boldsymbol{v} \quad A\boldsymbol{v} \quad A^2\boldsymbol{v}\cdots A^{n-1}\boldsymbol{v}]=n$.

**引理3.**[13] 假定 $C\in R^{1\times n}$,$(A,C)$为完全能观对$\Leftrightarrow A$ 有与 $C$ 不相正交的非零有特征向量,即 $A\alpha=\lambda\alpha, C\alpha=0$,则 $\alpha=0$.

**定义2.** 称系统(2)为可精确线性化的,是指存在一个区域 $\Omega\subset R^n$ 和一个同胚映射:$T:\Omega\to R^n$,一个非线性反馈控制 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$,在状态变换 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$下,将系统(2)变为

$$\dot{z} = Az + bv,\text{这里}\quad A=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\\cdots\\0\\1\end{bmatrix}.$$

记 $\Omega$ 为由矩阵 $\widetilde{D},A\widetilde{D},\cdots,A^{n-2}\widetilde{D}$ 的列向量所生成的向量空间,这里 $\widetilde{D}=[D \quad B]$.

**假设2.** $\mathrm{rank}\{\widetilde{D},A\widetilde{D},\cdots,A^{n-2}\widetilde{D}\}=r<n$.

**假设3.** $A$ 为不降阶矩阵,且对于 $A$ 的任意特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$,有 $\boldsymbol{\alpha}\notin\Omega$.

## 3 精确线性化

**引理4.** 对于双线性系统(2),若假设2和3成立,并存在一个 $C\in\Omega^{\perp}$,则$(A,C)$为完全可测对.证明从略.

**定理1.** 若假设2和3成立,则双线性系统(2)是可精确线性化的.

证明.由引理4知,$C\in\Omega^{\perp}$,$C\in R^{1\times n}$,且$(A,C)$为可测对.令 $\boldsymbol{y}=C\boldsymbol{x}$,$\dot{\boldsymbol{y}}=C\dot{\boldsymbol{x}}=CA\boldsymbol{x},\cdots$,$\boldsymbol{y}^{n-1}=CA^{n-1}\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}^n=CA^n\boldsymbol{x}+(CA^{n-1}D\boldsymbol{x}+CA^{n-1}B)\boldsymbol{u}$.用反证法可证 $CA^{n-1}D\neq 0$,$CA^{n-1}B\neq 0$.从而 $CA^{n-1}D\boldsymbol{x}+CA^{n-1}B\neq 0$.记

$U=\{\boldsymbol{x}:CA^{n-1}D\boldsymbol{x}+CA^{n-1}B\neq 0\}$.显然,$0\in U$,$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x})=\frac{-CA^{n-1}\boldsymbol{x}}{CA^{n-1}D\boldsymbol{x}+CA^{n-1}B},\quad \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{CA^{n-1}D\boldsymbol{x}+CA^{n-1}B},\quad \forall\, \boldsymbol{x}\in U.$$

记 $P=[C' \quad A'C'\cdots A^{n-1\prime}C']'$,则 $P:U\to R^n$ 为一同胚映射,且 $\xi=P\boldsymbol{x}$,有$\dot{\xi}=\hat{A}\xi+b\boldsymbol{v}$,这里

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix},\quad \text{故双线性系统(2)可线性化.}$$

注.此线性化条件比较严格,将矩阵 $A$ 任一元素改变,可能使线性化条件不满足.

## 4 精确反馈线性化系统的鲁棒稳定性

对于不确定双线性系统(1),假设其标称系统(2)满足假设2和3,则一定存在一个 $C\in$

$\Omega^{\perp}, C\in R^{1\times n}$，且存在某个区域 $U$ 及同胚变换 $P:U\to R^n, \xi=Px$ 与 $\boldsymbol{u}=\alpha(\boldsymbol{x})+\beta(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$，则标称系统(2)可线性化．而对于不确定系统(1)，在上述变换下，有 $\dot{\xi}=\hat{A}\xi+bv+bH(\xi,\boldsymbol{v})$，其中

$$H(\xi,\boldsymbol{v}) = CA^{n-1}[\Delta\widetilde{f}(P^{-1}\xi)+\Delta\widetilde{g}(P^{-1}\xi)(\alpha(P^{-1}\xi)+\beta(P^{-1}\xi)\boldsymbol{v})].$$

若假设1成立，则 $H(\xi,\boldsymbol{v})=\gamma_1(\xi)+\gamma_2(\xi)\boldsymbol{v}$，其中

$$\gamma_1(\xi) = CA^{n-1}\widetilde{D}(\widetilde{f}(P^{-1}\xi)+\widetilde{g}(P^{-1}\xi)\alpha(P^{-1}\xi)),\gamma_2(\xi) = CA^{n-1}\widetilde{D}\widetilde{g}(P^{-1}\xi)\beta(P^{-1}\xi)$$

对于不确定项，我们作下列假设．

**假设4.**　存在 $\varepsilon>0$，使 $1+CA^{n-1}\widetilde{D}\widetilde{g}(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x})>\varepsilon, \forall\ \boldsymbol{x}\in U$．记 $S$ 为 $\hat{A}'S+S\hat{A}-Sbb'S+I=0$ 正定解．令 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$，其中

$$\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}b'SP\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})=-\frac{\eta(\boldsymbol{x})\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{x})\|CA^{n-1}\widetilde{D}\|}{2\varepsilon(|\eta(\boldsymbol{x})|+\varepsilon_0\phi(t))},\quad \eta(\boldsymbol{x})=b'SP\boldsymbol{x}\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{x})\|CA^{n-1}\widetilde{D}\|,$$

$\widetilde{\sigma}(\boldsymbol{x})=2\sigma_1(\boldsymbol{x})+\sigma_2(\boldsymbol{x})(2|\alpha(\boldsymbol{x})|+\beta(\boldsymbol{x})\|b'SP\boldsymbol{x}\|)$．$\phi(t)$ 是任意一个在 $[0,\infty)$ 内一致连续的正函数，且 $\phi(t)\in L^1$．

**定理2.**　对于不确定的双线性系统(1)，若假定1—4成立，则存在一个非线性反馈控制 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})$，使得系统(1)在区域 $U$ 内渐近稳定的．

证明．令 $\boldsymbol{v}(\xi)=\boldsymbol{v}_1(\xi)+\boldsymbol{v}_2(\xi)$，其中 $\boldsymbol{v}_1(\xi)=\boldsymbol{u}_1(P^{-1}\xi), \boldsymbol{v}_2(\xi)=\boldsymbol{u}_1(P^{-1}\xi)$．取 $E(\xi)=\xi'S\xi$，则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \xi'(\hat{A}'A+S\hat{A}-Sbb'S)\xi+2\xi Sbv_2+2\xi'Sb(\gamma_1(\xi)+\gamma_2(\xi)\boldsymbol{v}_1+\gamma_2(\xi)\boldsymbol{v}_2) = \\ &\quad -\xi'\xi+\xi'Sb(2\gamma_1(\xi)-\gamma_2(\xi)b'S\xi)+2\xi'Sb(1+\gamma_2(\xi)),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &\leqslant -\xi'\xi+\|\xi'Sb\|\widetilde{\sigma}(\xi)\|CA^{n-1}\widetilde{D}\|+2\xi'Sb(1+\gamma_2(\xi))\times \\ &\quad \left(-\frac{\eta(P^{-1}\xi)\widetilde{\sigma}(\xi)\|CA^{n-1}\widetilde{D}\|}{2\varepsilon(|\eta(P^{-1}\xi)|+\varepsilon_0\phi(t))}\right)\leqslant -\xi'\xi+|\eta(P^{-1}\xi)|-\frac{|\eta(P^{-1}\xi|^2}{|\eta(P^{-1}\xi)|+\varepsilon_0\phi(t)}\leqslant \\ &\quad -\xi'\xi+\varepsilon_0\phi(t)\leqslant -\tilde{\lambda}E+\varepsilon_0\phi(t),\end{aligned}$$

其中 $\lambda_0=\frac{1}{\lambda_{\max}(S)}>0, \forall\ \varepsilon_0>0$．由于 $\phi(t)\in L^1$，当 $t\to\infty$ 时，$\phi(t)\to 0$．由文[11]知，$E(t)\to 0$，故当 $t\to\infty$ 时，有 $\xi(t)\to 0$．所以，$\boldsymbol{x}(t)=P^{-1}\xi(t)\to 0$，即系统在 $U$ 内是渐近稳定的．

注．如果 $\phi(t)=e^{-\beta t}, \beta>0$，则由于

$$E(t)\leqslant e^{-\tilde{\lambda}t}E(0)+\begin{cases}\dfrac{\varepsilon_0}{\tilde{\lambda}-\beta}(e^{-\beta t}-e^{-\tilde{\lambda}t}), & \tilde{\lambda}\neq\beta,\\ \varepsilon_0 te^{-\beta t}, & \tilde{\lambda}=\beta,\end{cases}$$

故系统是指数稳定的．

## 参　考　文　献


1　Riccardo Mario, Patrizo Tomei. Robust stabilization of feedback linearizable time-varying uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 1993, **29**(1): 181—189

2　Qu Zhihua, Darren M Dawson. Robust control of casesded and individually feedback linearizable nonlinear systems. *Automatica*, 1994, **30**(6): 1057—1064

3 D'Attwllis C. E, Garcia R A. Output controllability of nonlinear systems with uniformly bounded controls. *Control-Theory and Advanced Technology*, 1993, **9**(2): 441—455

4 Qu Z, Kaloust J. Attenuation of nonlinearly state-dependent uncertainties: robust control design and its application to robotic manipulatiors. *Int. J. Control*, 1996, **63**(1): 27—40

5 Akhrif O, Blankeship G L. Robust stabilization of feedback linearizable systems. In: Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, 1988, 1714—1719

6 Boothby W M. Some comments on global linearization of nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 1984, **4**: 143—147

7 Derese I, Noldus E. Design of linear feedback laws for bilinear systems. *Int. J. Control*, 1980, **31**(2): 219—237

8 Isidori A. Nonlinear control systems. Berlin: Springer-Verlag, 1989

9 Nijmeijer H, Van der Schaft A J. Nonlinear dynamical control systems. Berlin: Spring-Verlag, 1990

10 Rugh Wilson. Nonlinear system theory——The Volterra/Wiener approach. Maryland: The Johns Hopkings University Press, 1981

11 Desoer C A, Vidyasagar M. Feedback systems: input-output properties. New York: Academic Press, 1975

12 韩京清等. 线性系统理论代数基础. 沈阳：辽宁科学出版社，1983

13 郑大钟. 线性系统理论. 北京：清华大学出版社，1990

# NEW METHOD OF ROBUST CONTROL OF EXECT FEEDBACK LINEARIZABLE TIME-VARYING UNCERTAIN BILINEAR SYSTEMS

FANG YANGWANG HAN CHONGZHAO

(*System Engineering Institute, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

**Abstract** In this paper, the robust control problem for single input feedback linearizable time-varying uncertain bilinear system is discussed. Without using Lie derivative and Lie bracket operation of differential geometry, we only use the algebra method to give a sufficient condition of single input exact feedback linearizable bilinear systems. At the same time, we develop the design approach of robust control of exact feedback linearizable bilinear systems.

**Key words** Bilinear systems, uncertainties, exact feedback linearizable, robust control.