第24卷 第6期 自动化学报 Vol. 24, No. 6
1998年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1998

短文

一般非线性系统的零动态、正则标准形与局部反馈渐近镇定[1)]

佘 焱
(上海交通大学信息与控制工程系 上海 200240)
张嗣瀛
(东北大学自动控制系 沈阳 110006)

摘 要 研究了一般非线性系统的零动态算法，得到了应用广泛的正则标准形，只需对系统做较弱的正则性假设，即平衡点附近某些分布是非奇异的. 同时讨论了该标准形在局部反馈渐近镇定中的应用，该结果适用于解决局部反馈渐近镇定的临界问题. 仿射非线性系统的结果成为该文结果的特例.

关键词 非线性系统，零动态，标准形，局部反馈渐近镇定.

1 引言

近二十年来，由于微分几何方法的引入，非线性控制系统理论取得了很大进展[2]，广泛应用于非线性大系统[3]、全局输出调节[4]等. 研究的基本出发点之一是通过微分同胚将非线性系统变换成易于处理的标准形[5—7]，如精确线性化[8]、部分线性化[9]、高阶近似线性化[10]等.

本文研究了一般非线性系统的零动态算法及其正则标准形，并应用于一般非线性系统的局部反馈渐近镇定问题.

2 一般非线性系统的零动态算法

考虑如下一般非线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{y} = h(\boldsymbol{x}), \tag{1b}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in R^n, \boldsymbol{u}\in R^m, \boldsymbol{y}\in R^m, f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), h(\boldsymbol{x})$是光滑函数，$f(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)=0, h(\boldsymbol{x}_0)=0, (\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)\in R^n\times R^m$，$\mathrm{d}h(\boldsymbol{x}_0)$各行线性无关.

定义1. 称 R^n 中的光滑子流形 z^* 是系统(1)在 $\boldsymbol{x}_0\in z^*$ 的零输出子流形，如果(i)$\forall\ \boldsymbol{x}\in z^*$，有 $h(\boldsymbol{x})=0$；(ii) 存在唯一且光滑的映射 $u^*: z^*\to R^m$，满足 $f^*(\boldsymbol{x})=f^*(\boldsymbol{x},u^*(\boldsymbol{x}))$

1) 国家自然科学基金、中国博士后科学基金和辽宁省科学技术基金资助项目.
收稿日期 1996-11-12

$\in T_{z^*}(x)$，其中 $T_{z^*}(x)$ 是 z^* 在 x 的切空间.

如果 z^* 在 x_0 局部最大，则称 (z^*, f) 是系统(1)在 x_0 的零动态，z^* 是系统(1)在 x_0 的零动态子流形，f^* 是系统(1)在 x_0 的零动态向量场.

下面导出系统(1)的零动态算法.

第1步.　定义 $M_0=\{x\in R^n: h(x)=0\}$. 假设 $\mathrm{d}h$ 在 x_0 的秩为 $s_0=m$，记 $H_0(x)=h(x)$，以 M_0^c 记 M_0 包含 x_0 的连通子集. 记 $r_{-1}=0$，假设 $\frac{\partial}{\partial u}L_f H_0(x)$ 在 (x_0,u_0) 的某邻域 $U_0\cap(M_0^c\times R^m)$ 上有常秩 r_0，适当调整 $h(x)$ 各行的秩序，使 $\frac{\partial}{\partial u}L_f H_0(x)$ 的前 r_0 行线性无关，则在 (x_0,u_0) 的某邻域 U'_0 唯一存在 $(s_0-r_0)\times r_0$ 阶矩阵 $P_0^0(x,u)$，使得对 $U_0\cap(M_0^c\times R^m)$ 上的每一点 (x,u)，$[P_0^0(x,u)I_0]$ 均张成方程组 $\gamma\frac{\partial}{\partial u}L_f H_0(x)$ 的解空间，其中 I_0 是 $(s_0-r_0)\times(s_0-r_0)$ 阶单位阵. 记 $R_0(x,u)=[P_0^0(x,u)I_0]$，假设当 $(x,u)\in U'_0\cap(M_0^c\times R^m)$ 时，有 $\frac{\partial}{\partial u}(R_0(x,u)L_f H_0(x))=0$，同时假设，存在 s_0-r_0 维列向量 $\sigma_1(x,u)$ 满足：1）当 $(x,u)\in U'_0\cap(M_0^c\times R^m)$ 时，$\sigma_1(x,u)=0$；2）当 $(x,u)\in U'_0$ 时，$\frac{\partial}{\partial u}(R_0(x,u)L_f H_0(x)-\sigma_1(x,u))=0$. 令 $\Phi_0(x)=R_0(x,u)L_f H_0(x)+\sigma_1(x,u)$，映射 $H_1(x)=\mathrm{col}(H_0(x),\Phi_0(x))$ 的微分在 x_0 线性无关，其行数为 s_0+s_1，则在 x_0 的某邻域 V_1，$M_1=\{x\in V_1: H_1(x)=0\}$ 是子流形.

第 $k+1$ 步.　设 $H_{k-1}(x)$ 和 $\Phi_{k-1}(x)$ 已经得到，其行数分别为 $s_0+\cdots+s_{k-1}$ 和 s_k，映射 $H_k(x)=\mathrm{col}(H_{k-1}(x),\Phi_{k-1}(x))$ 的微分在 x_0 线性无关，则在 x_0 的某邻域 V_k，$M_k=\{x\in V_k: H_k=0\}$ 是子流形. 以 M_k^c 记 M_k 包含 x_0 的连通子集. 假设 $\frac{\partial}{\partial u}L_f H_k(x)$ 在 (x_0,u_0) 的某邻域 $U_k\cap(M_k^c\times R^m)$ 上有常秩 r_k，适当调整 $h(x)$ 各行的秩序，使 $\frac{\partial}{\partial u}L_f\Phi_{k-1}(x)$ 的后 $s_k-r_k+r_{k-1}$ 行是 $\frac{\partial}{\partial u}L_f H_k(x)$ 前 r_k 行的线性组合. 所以，在 (x_0,u_0) 的某邻域 U'_k 唯一存在列数分别为 $r_0, r_1-r_0, \cdots, r_k-r_{k-1}$，行数为 $(s_k-r_k+r_{k-1})$ 的矩阵 $P_k^0(x,u),\cdots,P_k^k(x,u)$，使得在 $U'_k\cap(M_k^c\times R^m)$ 上的任意点 (x,u)，矩阵

$$R_k(x,u)=\begin{bmatrix} R_{k-1}(x,u) & 0 \\ [P_k^0(x,u)O_k^0\cdots P_k^{k-1}(x,u)O_k^{k-1}] & [P_k^k(x,u)I_k] \end{bmatrix} \tag{2}$$

张成方程组 $\gamma\frac{\partial}{\partial u}L_f H_k(x)=0$ 的解空间，其中 I_k 是 $s_k-r_k+r_{k-1}$ 阶单位阵，$O_k^0,\cdots,O_k^{k-1}$ 是列数分别为 $s_0-r_0,\cdots,s_{k-1}-r_{k-1}$ 的零矩阵. 假设当 $(x,u)\in U'_k\cap(M_k^c\times R^m)$ 时有 $\frac{\partial}{\partial u}[R_k(x,u)L_f H_k(x)]=0$，同时假设存在 $s_k-r_k+r_{k-1}$ 维列向量 $\sigma_{k+1}(x,u)$ 满足：1）当 $(x,u)\in U'_k\cap(M_k^c\times R^m)$ 时，$\sigma_{k+1}(x,u)=0$；2）当 $(x,u)\in U'_k$ 时，$\frac{\partial}{\partial u}(R_k(x,u)L_f H_k(x)-\sigma_{k+1}(x,u))=0$. 令

$$\Phi_k(x)=[P_k^0(x,u)O_k^0\cdots P_k^{k-1}(x,u)O_k^{k-1}P_k^k(x,u)I_k]L_f H_k(x)-\sigma_{k+1}(x,u)=$$
$$P_k^0(x,u)L_f H_0^1(x)+\sum_{i=1}^{k}P_k^i(x,u)L_f\Phi_{i-1}^1(x)+L_f\Phi_{k-1}^2(x)-\sigma_{k+1}(x,u), \tag{3}$$

其中 Φ_{i-1}^1 是 Φ_{i-1} 的前 r_i-r_{i-1} 行，Φ_{i-1}^2 是 Φ_{i-1} 的后 $s_i-r_i+r_{i-1}$ 行，注意到矩阵 $P_k^i(x,u)$ 的列数，所以上述求和实际上有 r_{k-1} 项. 假设映射 $H_{k+1}(x)=\mathrm{col}(H_k(x),\Phi_k(x))$ 的微分在 x_0 线性无关，则在 x_0 的某邻域 V_{k+1}，$M_{k+1}=\{x\in V_{k+1}: H_{k+1}(x)=0\}$ 是子流形.

假设存在某个 $k^*\geqslant 0$，$r_{k^*}=m$，则以上算法停止，$z^*=M_{k^*}$ 为系统(1)在 $\boldsymbol{x}_0$ 的零动态子流形，唯一存在 $u^*(\boldsymbol{x})$ 使得 $f(\boldsymbol{x},u^*(\boldsymbol{x}))|_{z^*}$ 是系统(1)在 $\boldsymbol{x}_0$ 的零动态向量场.

以上算法中的假设可概括如下：

(i) 当 $0\leqslant k\leqslant k^*-1$，$\frac{\partial}{\partial u}L_f H_k(\boldsymbol{x})$ 在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)$ 的某邻域 $U_k\cap(M_k^c\times R^m)$ 上有常秩 r_k；

(ii) 当 $0\leqslant k\leqslant k^*-1$，存在 $s_k-r_k+r_{k-1}$ 维列向量 $\sigma_{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 及 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)$ 的某邻域 U'_k，满足(a)当 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\in U'_k\cap(M_k^c\times R^m)$ 时，$\sigma_{k+1}(x,u)=0$，(b) 当 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\in U'_k$ 时，$\frac{\partial}{\partial u}(R_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})L_f H_k(\boldsymbol{x})-\sigma_{k+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))=0$；

(iii) 向量 $\mathrm{d}H_{k+1}(\boldsymbol{x})=\mathrm{col}(\mathrm{d}H_k(\boldsymbol{x}),\mathrm{d}\Phi_k(\boldsymbol{x}))$ 各行在 $\boldsymbol{x}_0$ 线性无关；

(iv) $r_{k^*}=m$.

定义2. 如果系统(1)在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)$ 满足假设(i)—(iv)，称 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)$ 是系统(1)的零动态算法正则点.

注1. 假设(i)—(iv)使得定义2与 $\sigma_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ 的选择无关[1].

3 一般非线性系统的正则标准形

设 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)$ 是系统(1)的零动态算法正则点，则可以引入如下坐标变换. 首先设 $\xi_1(\boldsymbol{x})=H_0(\boldsymbol{x})$，当 $2\leqslant k\leqslant k^*+1$，令 $\xi_k(\boldsymbol{x})$ 的前 $m-s_{k-1}$ 个分量为零，后 s_{k-1} 个分量等于 $\Phi_{k-2}(\boldsymbol{x})$，设矩阵

$$\Xi(\boldsymbol{x})=[\xi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\xi_{k^*+1}(\boldsymbol{x})]$$

的第 i 行的前 n_i 项非零，则由构造 $1\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_m=k^*+1$，对 $1\leqslant i\leqslant m$，令

$$\xi^i(\boldsymbol{x})=\mathrm{col}(\xi_1^i(\boldsymbol{x}),\cdots,\xi_{n_i}^i(\boldsymbol{x})),\tag{4}$$

其中 $\xi_k^i(\boldsymbol{x})$ 是 $\xi_k(\boldsymbol{x})$ 的第 i 个分量，所以 $\xi^1,\cdots,\xi^m$ 连同具有 $n-s_0-\cdots-s_{k^*}$ 个分量的函数 $\eta(\boldsymbol{x})$ 构成新的坐标. 因为 $\xi^i(\boldsymbol{x}_0)=0$，$1\leqslant i\leqslant m$，所以不妨取 $\eta(\boldsymbol{x}_0)=0$.

定理1. 设 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)$ 是系统(1)的零动态算法正则点，则在 $\boldsymbol{x}_0$ 存在局部坐标变换 $\Psi(\boldsymbol{x})=(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta)$，使得系统(1)在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)$ 的某邻域内，具有以下标准形：

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1^i &= \xi_2^i+\sum_{j=1}^{r_{n_i-2}}\delta_{1,j}^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})L_{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}\xi_{n_j}^i+\sigma_1^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),\\
&\cdots\\
\dot{\xi}_{n_i-1}^i &= \xi_{n_i}^i+\sum_{j=1}^{r_{n_i-2}}\delta_{n_i-1,j}^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})L_{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}\xi_{n_j}^i+\sigma_{n_i-1}^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),\\
\dot{\xi}_{n_i}^i &= L_{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}\xi_{n_i}^i,\\
y_i &= \xi_1^i,\\
i &= 1,\cdots,m,\\
\dot{\eta} &= f_0(\xi^1,\cdots,\xi^m,\eta,\boldsymbol{u}),
\end{aligned}\tag{5}$$

其中在流形 $M_k=\{\boldsymbol{x}\in R^m:\xi_1^1(\boldsymbol{x})=0,\cdots,\xi_k^1(\boldsymbol{x})=0,\cdots,\xi_1^m(\boldsymbol{x})=0,\cdots,\xi_k^m(\boldsymbol{x})=0\}$ 上，

$$\sigma_k^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 0,\quad \frac{\partial}{\partial u}L_{f(x,u)}\xi_k^i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{r_{n_i}-2}\delta_{k,j}^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\frac{\partial}{\partial u}L_{f(x,u)}\xi_{n_j}^i(\boldsymbol{x}),$$
$$1 \leqslant k \leqslant n_i - 1, 1 \leqslant i \leqslant m, \tag{6}$$

坐标 $\Psi(\boldsymbol{x})$满足

$$\xi_1^i = h_i,\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$
$$\xi_{k+1}^i(\boldsymbol{x}) = -\sum_{j=1}^{r_{n_i}-2}\delta_{k,j}^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})L_{f(x,u)}\xi_{n_j}^i(\boldsymbol{x}) + L_{f(x,u)}\xi_k^i(\boldsymbol{x}) - \sigma_k^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}), 1\leqslant k\leqslant n_i - 1,$$
$$1\leqslant i\leqslant m. \tag{7}$$

子流形 $z^* = \{\boldsymbol{x}\in R^m : \xi^i = 0, 1\leqslant i\leqslant m\}$是系统(1)的零动态子流形. $\dot{\eta} = f_0(0,\cdots,0,\eta,u^*(0,\cdots,0,\eta))$是系统(1)的零动态向量场，其中 $u^*(\boldsymbol{x})$是下列隐函数方程组的唯一解：

$$L_{f(x,u)}\xi_{n_i}^i(\boldsymbol{x}) = 0,\quad 1\leqslant i\leqslant m, \tag{8}$$

其中矩阵 $A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \mathrm{col}(\frac{\partial}{\partial u}L_{f(x,u)}\xi_{n_1}^1, \frac{\partial}{\partial u}L_{f(x,u)}\xi_{n_2}^2,\cdots,\frac{\partial}{\partial u}L_{f(x,u)}\xi_{n_m}^m)$在$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)$点非奇异.

证明. 因为式(2)是方程组 $\gamma\frac{\partial}{\partial u}L_f H_k(\boldsymbol{x}) = 0$的解空间，式(6)，(7)可由式(3)得，从而得式(5). 式(5)中求和的项数 r_{n_i-2}可由式(4)及 $r_{n_i-2} = m - s_{n_i-1}$得.

注2. 因为 $r_{n_1-2} = 0$，对$2\leqslant i\leqslant m$，当 $n_i = n_{i+1}$时，有 $r_{n_i-2} = r_{n_{i+1}-2}$；当 $n_i < n_{i+1}$时，有 $r_{n_{i+1}-2} = r_{n_i-2} + 1$. 所以，对$1\leqslant i\leqslant m$，均有 $r_{n_i-2}\leqslant i - 1$.

4　一般非线性系统的局部反馈渐近镇定

作为定理1的应用，本节将给出一般非线性系统局部反馈渐近镇定的一个定理. 仿射非线性系统的结果是该定理的特款.

定义3.　如果其零动态在平衡点 $\boldsymbol{x}_0$附近渐近稳定，称系统(1)在 $\boldsymbol{x}_0$是最小相位系统.

定理2.　设$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)$是系统(1)的零动态算法正则点，系统(1)在 $\boldsymbol{x}_0$是最小相位系统，且对于系统(1)的标准形(5)有$\frac{\partial\sigma_j^i}{\partial x}(0,0) = 0(1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n_i - 1)$，则系统(1)在$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0)$可局部反馈渐近镇定. 证明略.

5　结论

零动态作为非线性系统几何理论的重要概念之一，近年来受到很大关注. 并在伺服问题、局部镇定、全局镇定、奇异系统等领域获得了重要应用. 因此，对其进行深入研究是十分重要的. 本文对一般非线性系统导出了零动态算法和正则标准形，显见，局部反馈渐近镇定仅为其重要应用之一例. 这些结果还可导致其它相关结果的推广.

参 考 文 献

1　Isidori A. Nonlinear Control Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1989

2　程代展. 非线性系统几何理论. 北京：科学出版社，1988

3　余　焱，张嗣瀛. 非线性大系统的分散控制与分散线性化. 自动化学报，1998，**24**(5)：585—592

4 佘 焱，张嗣瀛. 非线性控制系统的全局输出调节. 自动化学报，待出版

5 刘晓平，王景才，张嗣瀛. The canonical form of uncontrol nolinear control system. *Science in China*, *Seriers A*1992, **35**:113—120

6 佘 焱，张嗣瀛，一般非线性系统的相关阶与标准形，自动化学报，1998，**24**(4)：570—572

7 Krener A J. Normal forms for linear and nonlinear systems. *Contempor. Math.* 1987, **68**:157—189

8 Cheng D, Isidori A *et al.* On the linearization of nolinear systems with outputs. *Math. Syst. Theor.* 1988, **21**:63—83

9 Krener A J, Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear obervers. *Syst. Contr. Lett.* 1983, **3**:47—52

10 Xu Z, Hanser J. Higher order approximate feedback linearization about a manifold for multi-imput sustem. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1995, **40**:833—840

THE ZERO DYNAMICS, NORM FORM AND LOCAL FEEDBACK ASYMPTOTIC STABILIZATION FOR GENERAL NONLINEAR CONTROL SYSTEMS

SHE YAN

(*Dept. of Infor. & Contr., Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200240)

ZHANG SIYING

(*Dept. of Auto. Contr., Northeastern University, Shenyang* 110006)

Abstract Zero dynamics algorithm for general nolinear control systems is proposed, in which we need only very mild ragularity assumptions, namly, the constancy of the dimensions of certain distributions (and/or of the ranks of certain mappings) around a given point. From the zero dynamics algorithm the norm form for general nolinear control systems is presented, which is extension of the affine nonlinear systems. Last, we study one of the applications of the norm form to the problem of local feedback asymptotic stabilization. This result does not require asymptotic stability in the first approximation for the zero dynamics, so that it may be useful in order to solve critical problems of local feedback asymptotic stabilization.

Key words Nonlinear systems, zero dynamics, norm form, local asymptotic stabilization.