第24卷 第6期 自动化学报 Vol. 24, No. 6
1998年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1998

短文

非线性离散时间系统迭代学习控制的稳定性分析[1)]

孙明轩

(西安工业学院电子工程系 西安 710032)

摘 要 讨论了初始偏移对于非线性离散时间系统迭代学习控制性能的影响. 提出描述选择学习控制算法的学习律,并给出保证系统稳定性的充分条件.

关键词 初始条件问题,稳定性,迭代学习控制,非线性离散时间系统.

1 问题的提出

近年来,讨论初始偏移对迭代学习控制(ILC)系统跟踪性能影响的稳定性问题受到特别重视,但关于离散时间系统稳定性方面的研究结果却很少. 我们给出一个简单的例子. 考察系统

$$x_k(t+1)=Ax_k(t)+Bu_k(t),\quad y_k(t)=Cx_k(t),$$
$$u_{k+1}(t)=u_k(t)+\Gamma(y_d(t)-y_k(t)),$$

$y_d(\cdot)$为给定的期望轨迹. 设 $y_d(0)=0, u_0(0)=0$,有 $u_k(0)=-\sum_{i=0}^{k-1}\Gamma Cx_i(0)$. 当初态偏移使得级数$\sum_{i=0}^{k-1}\Gamma Cx_i(0)$发散时,序列$\{u_k(0)\}$发散,从而导致 ILC 算法发散. 从此例可以看出,对于离散 ILC 系统而言,研究初态偏移的影响也是有意义的. 针对不同性质的非线性离散时间系统,本文提出并分析选择学习控制算法.

2 主要结果

首先考察含控制直接传输通道的非线性系统

$$x_k(t+1)=f(x_k(t))+B(x_k(t))u_k(t), \tag{1a}$$
$$y_k(t)=g(x_k(t))+D(x_k(t))u_k(t), \tag{1b}$$

式中 $t\in[0,T]$,$[0,T]$表示$\{0,1,\cdots,T\}$,$x_k(t)\in R^n$,$u_k(t)\in R^m$,$y_k(t)\in R^m$.

采用学习律

1)国家自然科学基金资助项目.

收稿日期 1996-11-04

$$z_k(t+1)=\widetilde{f}(z_k(t))+\widetilde{B}(z_k(t))e_k(t),\tag{2a}$$

$$\widetilde{u}_k(t)=\widetilde{g}(z_k(t))+\widetilde{D}(z_k(t))e_k(t),\tag{2b}$$

$$u_{k+1}(t)=(1-\gamma)u_k(t)+\gamma u_{k-j}(t)+\widetilde{u}_k(t),\tag{2c}$$

式中$0\leqslant j\leqslant M-1$，$0\leqslant\gamma<1$为遗忘因子，$e_k(t)=y_d(t)-y_k(t)$，$z_k(t)\in R^r$具有零初值.

定义1(稳定性). 一迭代学习控制系统是稳定的，如果对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$\|x_d(0)-x_k(0)\|\leqslant\delta,\forall\ k$时，$e_k(t)$，$t\in[0,T]$有界，且$\limsup\limits_{k\to\infty}\|e_k(t)\|\leqslant\varepsilon$，$t\in[0,T]$.

引理1. 设实序列$\{a_k\}$由如下差分不等式描述

$a_k\leqslant\rho_1a_{k-1}+\rho_2a_{k-2}+\cdots+\rho_Na_{k-N}+d_k$，$k=N+1,N+2,\cdots$，它的初始条件为$a_i(i=1,2,\cdots,N)$，$\{d_k\}$为给定实扰动序列，如果$\rho_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,N)$，且$\rho=\sum\limits_{i=1}^{N}\rho_i<1$，则

(i) $d_k\leqslant\bar{d},\forall\ k$ 蕴涵 $a_k\leqslant\max\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}+\dfrac{\bar{d}}{1-\rho}$，

$\forall\ k\geqslant N+1$，$\limsup\limits_{k\to\infty}\ a_k\leqslant\dfrac{\bar{d}}{1-\rho}$；

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty}d_k=d_\infty$ 蕴涵 $\limsup\limits_{k\to\infty}\ a_k\leqslant\dfrac{d_\infty}{1-\rho}$.

证明见附录.

定理1. 设系统(1)满足假设：$f(\cdot)$，$B(\cdot)$，$g(\cdot)$，$D(\cdot)$关于x满足Lipschitz条件；k_h，$h\in\{f,B,g,D\}$为相应的Lipschitz常数；$\widetilde{f}(\cdot)$，$\widetilde{g}(\cdot)$关于z满足线性增长条件(即$\forall\ z\in R^r$，$\|h(z)\|\leqslant k_h\|z\|$，$h\in\{\widetilde{f},\widetilde{g}\}$)；$B(\cdot)$，$D(\cdot)$在$R^n$上有界，$\widetilde{B}(\cdot)$，$\widetilde{D}(\cdot)$在$R^r$上有界，其界分别记为$b_k$，$k\in\{B,D,\widetilde{B},\widetilde{D}\}$. 给定可达的期望轨迹$y_d(t)(t\in[0,T+1])$，如果存在$\rho\geqslant0$，使得$\|(1-\gamma)I-\widetilde{D}(z)D(x)\|\leqslant\rho<1-\gamma$，$\forall\ (z,x)\in R^r\times R^n$，则在学习律(2)作用下，该迭代学习控制系统是稳定的.

证明. 定义$\Delta(\cdot)_k(t)=(\cdot)_d(t)-(\cdot)_k(t)$，并记$c_1=\max\{k_{\widetilde{g}},b_{\widetilde{D}}(k_g+k_Db_{ud})\}$，第$k+1$次迭代时的控制误差满足

$$\|\Delta u_{k+1}(t)\|\leqslant\rho\|\Delta u_k(t)\|+\gamma\|\Delta u_{k-j}(t)\|+c_1(\|\Delta x_k(t)\|+\|z_k(t)\|).\tag{3}$$

由式(1a)，(2a)知

$$\|\Delta x_k(t)\|+\|z_k(t)\|\leqslant c_2^t\|\Delta x_k(0)\|+\sum_{s=0}^{t-1}c_3c_2^{t-s-1}\|\Delta u_k(s)\|,t\in[1,T],\tag{4}$$

式中$c_2=\max\{k_{\widetilde{f}},k_f+k_Bb_{ud}+b_{\widetilde{B}}(k_g+k_Db_{ud})\}$，$c_3=b_B+b_{\widetilde{B}}b_D$. 将式(4)代入式(3)，当选取正数$\lambda$使得$c_2\lambda<1$时，有

$$\begin{aligned}\lambda^t\|\Delta u_{k+1}(t)\|\leqslant&\rho\lambda^t\|\Delta u_k(t)\|+\gamma\lambda^t\|\Delta u_{k-j}(t)\|+\\&c_1c_3\lambda\frac{1-(c_2\lambda)^T}{1-c_2\lambda}\|\Delta u_k\|_\lambda+c_1\|\Delta x_k(0)\|,\qquad t\in[1,T].\end{aligned}\tag{5}$$

由式(3)知，式(5)对于$t=0$亦成立，故当$\|\Delta x_k(0)\|\leqslant\delta,\forall\ k$时

$$\|\Delta u_{k+1}\|_\lambda\leqslant\bar{\rho}\|\Delta u_k\|_\lambda+\gamma\|\Delta u_{k-j}\|_\lambda+c_1\delta,\tag{6}$$

式中$\bar{\rho}=\rho+c_1c_3\lambda\dfrac{1-(c_2\lambda)^T}{1-c_2\lambda}$. 由于$\rho<1-\gamma$，所以选取足够小的正数$\lambda<\dfrac{1}{c_2}$，可使得$\bar{\rho}<1-\gamma$. 这时，由引理1可得

$$\|\Delta u_k\|_\lambda\leqslant\max\{\|\Delta u_0\|_\lambda,\cdots,\|\Delta u_{M-1}\|_\lambda\}+\frac{c_1\delta}{1-\bar{\rho}-\gamma},k=M,M+1,\cdots,$$

$$\limsup_{k\to\infty}\|\Delta u_k\|_\lambda \leqslant c_4\delta,$$

式中 $u_0(t),\cdots,u_{M-1}(t)$ 为初始控制函数，$c_4=\frac{c_1}{1-\bar{\rho}-\gamma}$，并且 $\limsup_{k\to\infty}\|\Delta x_k\|_\lambda \leqslant c_5\delta$，$\limsup_{k\to\infty}\|e_k\|_\lambda \leqslant c_6\delta$，$c_5=1+c_3c_4\lambda\frac{1-(c_2\lambda)^T}{1-c_2\lambda}$，$c_6=(k_g+k_Db_{ud})c_5+b_Dc_4$. 这时，利用 λ 范数的性质知，$\forall\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\lambda^T\varepsilon/c_6$，可使得 $\|e_k(t)\|$ 关于任意 k 有界，且 $\limsup_{k\to\infty}\|e_k(t)\|\leqslant\varepsilon$.

证毕.

当 $\|\Delta x_k(0)\|$ 极限存在时，由式(6)和引理1知，足够小的正数 $\lambda<\frac{1}{c_2}$ 使得

$$\limsup_{k\to\infty}\|\Delta u_k\|_\lambda \leqslant \frac{c_1\lim\limits_{k\to\infty}\|\Delta x_k(0)\|}{1-\bar{\rho}-\gamma}.$$

这样，当 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\Delta x_k(0)\|=0$，可证得 $e_k(t)$ 在 $[0,T]$ 上的一致收敛性.

当系统输出仅为状态的函数时，不存在控制的直接传输通道(即 $D\equiv 0$)，定理1中的条件不能成立. 这时，$\forall\ x\in R^n, u\in R^m$，假设系统(1)($D\equiv 0$)的相对度[5]为 $r=\{r^1,\cdots,r^m\}$，且

$$\frac{\partial^2}{\partial u_{i_1}\partial u_{i_2}}g^l\circ f^{r^l-1}(f(x)+B(x)u)=0,\quad l,i_1,i_2=1,\cdots,m,\tag{7}$$

这里 $g\circ f$ 表示函数复合，f^l 记 l 次复合函数，g^l 为 g 的第 l 个分量. 它意味着 $\frac{\partial}{\partial u}g^l\circ f^{r^l-1}(f(x)+B(x)u)$ ($l=1,\cdots,m.$)与 u 无关. 因此，$m\times m$ 阶矩阵

$$D(x,u)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial u}g^1\circ f^{r^1-1}(f(x)+B(x)u)\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial u}g^m\circ f^{r^m-1}(f(x)+B(x)u)\end{bmatrix}$$

可简写为 $D(x)$. 给定期望轨迹 $y_d(t)$，$t\in[0,T+r^{\max}]$，$r^{\max}=\max\limits_{1\leqslant l\leqslant m}r^l$；$y_d^l(t)=y_k^l(t)$，$t\in[0,r^l-1]$. 构造学习律

$$u_{k+1}(t)=(1-\gamma)u_k(t)+\gamma u_{k-j}(t)+\Gamma(y_k(t),t)\begin{bmatrix}e_k^1(t+r^1)\\ \vdots\\ e_k^m(t+r^m)\end{bmatrix},\tag{8}$$

对于 $l=1,2,\cdots,m$，输出误差可写成

$$\begin{aligned}e_k^l(t+r^l)=&g^l\circ f^{r^l-1}(f(x_d(t))+B(x_d(t))u_d(t))-\\&g^l\circ f^{r^l-1}(f(x_k(t))+B(x_k(t))u_k(t))=\\&\frac{\partial}{\partial u_d}[g^l\circ f^{r^l-1}(f(x_d(t))+B(x_d(t))u_d]u_d(t)-\\&\frac{\partial}{\partial u_k}[g^l\circ f^{r^l-1}(f(x_k(t))+B(x_k(t))u_k]u_k(t)+\\&g^l\circ f^{r^l-1}(x_d(t))-g^l\circ f^{r^l}(x_k(t)).\end{aligned}\tag{9}$$

定理2. 设系统(1)($D\equiv 0$)的相对度为 r 且满足式(7)，$f(\cdot)$，$B(\cdot)$，$g(\cdot)$ 为实解析函数且满足 Lipschitz 条件，$B(\cdot)$ 在 R^n 上有界，给定可达的期望轨迹 $y_d(t)$，$t\in[0,T+r^{\max}]$. 如果存在 $\rho\geqslant 0$ 使得

$$\|(1-\gamma)I-\Gamma(g(x),t)D(x)\| \leqslant \rho < 1-\gamma, \quad \forall\ (x,t) \in R^n \times [0,T],$$

则在学习律(8)作用下,该迭代学习控制系统是稳定的.

当系统参数完全未知时,上述定理所给出的稳定性充分条件只能说明系统参数的稳定域存在,而不能用来确定学习增益矩阵.当系统参数不精确已知时,通过对系统参数的猜测,可利用稳定性充分条件确定学习增益矩阵.这是一种试凑的方法.实际上,有许多系统可以得到它足够精确的模型.这时,应该采用系统模型构造学习律.设系统(1)全状态输出,并已知$\{f(\cdot),B(\cdot)\}$的模型为$\{\widetilde{f}(\cdot),\widetilde{B}(\cdot)\}$,给定期望轨迹$x_d(t),t\in[0,T+1]$.记$B^+(x_d(t))=[B^T(x_d(t))B(x_d(t))]^{-1}B^T(x_d(t))$.当$B(\cdot)$在$R^n$上列满秩时,期望控制$u_d(t)$可由(1a)解出

$$u_d(t) = B^+ (x_d(t))[x_d(t+1) - f(x_d(t))]. \tag{10}$$

任意选取一分段连续的控制$u_0(t),t\in[0,T]$,施加给系统(1a)产生输出轨迹$x_0(t)$.这时,$x_0(t)$与$x_d(t)$的偏差是由于控制的偏差产生的.该控制偏差为

$$\begin{aligned}\Delta u_0(t) = {} & B^+ (x_d(t))[x_d(t+1) - f(x_d(t))] - \\ & B^+ (x_0(t))[x_0(t+1) - f(x_0(t))].\end{aligned} \tag{11}$$

利用模型$\{\widetilde{f}(\cdot),\widetilde{B}(\cdot)\}$可以给出控制偏差(11)的几种不同程度的近似公式

$$\begin{aligned}\Delta u_0(t) \approx {} & \widetilde{B}^+ (x_d(t))[x_d(t+1) - \widetilde{f}(x_d(t))] - \\ & \widetilde{B}^+ (x_0(t))[x_0(t+1) - \widetilde{f}(x_0(t))],\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\Delta u_0(t) \approx {} & \widetilde{B}^+ (x_0(t))[x_d(t+1) - x_0(t+1) - \\ & \widetilde{f}(x_d(t)) + \widetilde{f}(x_0(t))],\end{aligned} \tag{13}$$

$$\Delta u_0(t) \approx \widetilde{B}^+ (e_0(t))[e_0(t+1) - \widetilde{f}(e_0(t))], \tag{14}$$

式中$e_0(t)=x_d(t)-x_0(t)$.可以利用控制偏差的近似修正控制,不断进行迭代控制.这里利用式(13)构造下述学习律

$$\begin{aligned}u_{k+1}(t) = {} & (1-\gamma)u_k(t) + \gamma u_{k-j}(t) + \widetilde{B}^+ (x_k(t))\{x_d(t+1) - x_k(t+1) - \\ & [\widetilde{f}(x_d(t)) - \widetilde{f}(x_k(t))]\}.\end{aligned} \tag{15}$$

定理3. 设系统(1)全状态输出且满足假设:$f(\cdot),B(\cdot)$, $\widetilde{f}(\cdot)$满足 Lipschitz 条件,$B(\cdot),\widetilde{B}^+(\cdot)$在$R^n$上有界,给定可达的期望轨迹$x_d(t),t\in[0,T+1]$.如果存在$\rho\geqslant 0$使得

$$\|(1-\gamma)I - \widetilde{B}^+ (x)B(x)\| \leqslant \rho < 1-\gamma, \forall\ x \in R^n,$$

则在学习律(15)作用下,该迭代学习控制系统是稳定的.

3 结论

文[3]提出D型遗忘因子学习律,其收敛性要求通过减小γ逐渐衰减$u_0(t)$的影响,直至取消遗忘作用.与此不同,选择学习律中的遗忘因子却可以固定不变.文[1]对于P型遗忘因子学习律,提出选择学习算法用于确定$u_0(t)$.实际上,我们可以更准确地利用式(2),(8),(15)表述这种学习算法[6].在同样的条件下,文中给出的证明表明了当初态偏移

被消除时,所构造的学习算法是收敛的.

参 考 文 献

1 Arimoto S, Naniwa T, Suzuki H. Selective learning with a forgetting factor for robotic motion control. In:Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Sacramento, CA: 1991. 728—733

2 Bien Z, Huh K M. Higher-order iterative learning control algorithm. In: IEE Proc. D. 1989, **136**(3):105—112

3 Heinzinger G, Fenwick D, Paden B, Miyazaki F. Stability of learning control with disturbances and uncertain initial conditions. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992, **37**(1):110—114

4 Hwang D H, Bien Z, Oh S R. Iterative learning control method for discrete-time dynamic systems. In: IEE Proc. D, 1991, **138**(2):139—144

5 Jang T J, Ahn H S, Choi C H. Iterative learning control for discrete-time nonlinear systems. *Int. J. Systems Sci.*, 1994, **25**(7):1179—1189

6 Sun M *et al*. Selective learning with a forgetting factor for trajectory tracking of uncertain nonlinear systems. In: Proc. of the 2nd Asian Control Conf., Seoul. 1997, Ⅱ: 47—50

附 录

引理1的证明

(i) 选取 $a_{k_1}=\max\{a_{k-1},a_{k-2},\cdots,a_{k-N}\}$,则有 $a_k\leqslant\rho a_{k_1}+\bar{d}$. 同样,选取 $a_{k_2}=\max\{a_{k_1-1},a_{k_1-2},\cdots,a_{k_1-N}\}$,可得 $a_{k_1}\leqslant\rho a_{k_2}+\bar{d}$. 结合以上两式,则有

$$a_k\leqslant\rho^2a_{k_2}+\rho\bar{d}+\bar{d}.$$

一般地

$$a_k\leqslant\rho^m a_{k_m}+\frac{1-\rho^m}{1-\rho}\bar{d},$$

这里 $k_m\leqslant N$, $\left[\frac{k-1}{N}\right]\leqslant m\leqslant k-N$. 进一步地,记 $M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_N\}$,得

$$a_k\leqslant\rho^{\left[\frac{k-1}{N}\right]}M+\frac{1-\rho^{k-N}}{1-\rho}\bar{d}.$$

此即证得式(1).

(ii)定义 $b_k=a_k-\dfrac{d_\infty}{1-\rho}$, $\varepsilon_k=d_k-d_\infty$,则有

$$b_k\leqslant\rho_1b_{k-1}+\rho_2b_{k-2}+\cdots+\rho_Nb_{k-N}+\varepsilon_k,\quad k=N+1,N+2,\cdots.$$

由于 d_k 的极限存在,故对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 K,当 $k>K$ 时,有 $|\varepsilon_k|\leqslant\varepsilon$. 由(i)知,对于 $k>K$,

$$b_k\leqslant\rho^{\left[\frac{k-1}{N}\right]}M+\frac{1-\rho^{k-N}}{1-\rho}\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知 $\limsup\limits_{k\to\infty}b_k\leqslant0$. 证毕.

STABILITY ANALYSIS OF ITERATIVE LEARNING CONTROL FOR NONLINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS

SUN MINGXUAN

(*Department of Electrical Engineering, Xi'an Institute of Technology, Xi'an* 710032)

Abstract Selective learning laws for trajectory tracking of a broad class of nonlinear discrete-time systems in the presence of reinitialization errors are proposed in this paper. The sufficient conditions which guarantee the stability of the learning controls are given.

Key words Initial condition problem, stability, iterative learning control, nonlinear discrete-time systems.