第24卷　第6期
1998年11月

自　动　化　学　报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 24, No. 6
Nov., 1998

短文

OBE 算法对误差界低估的鲁棒性[1)]

孙先仿
（北京航空航天大学自动控制系　北京　100083）
（中国科学院自动化研究所复杂系统实验室　北京　100080）
张志方
（中国科技大学管理学院　北京　101408）
宁文如　范跃祖
（北京航空航天大学自动控制系　北京　100083）

摘　要　研究了具有未知但有界(UBB)误差系统辨识的最优定界椭球(OBE)算法对误差界低估的鲁棒性. 证明了在一定的条件下,即使误差界低估,任何 OBE 算法都能保持其收敛性. 这一结论可用于具有 UBB 误差的实际系统参数估计中,以期获得不太保守的结果.

关键词　OBE 算法,UBB 误差,集员辨识,收敛性,鲁棒性.

1　引言

近年来,具有 UBB 误差系统的参数辨识问题引起了人们的广泛关注[1]. 有关这类系统的两种典型的辨识算法是在 1982 年分别由 Milanese 与 Belforte[2] 和 Fogel 与 Huang[3] 提出的. 此后,人们又提出了许多改进的算法[4]. 这类算法的一个主要特征是其辨识结果为参数向量 θ 的成员集 Θ_k,因此它们被称为集员辨识算法.

在诸多的集员辨识算法中,OBE 算法是被广泛采用的算法,其收敛性已在一些文献中作了探讨[3,4]. 但是,所有 OBE 算法收敛性的结论都是在误差界未被低估这一基本条件下导出的. 本文则讨论在误差界低估情况下 OBE 算法的收敛性问题.

2　符号和定义

考虑如下线性系统的参数辨识问题

$$y_k = \phi_k^{\mathrm{T}}\theta^* + e_k, \quad k = 1,2,\cdots, \tag{1}$$

其中 $\theta^* \in R^n$ 是待辨识的参数向量,有关 θ^* 的先验信息是它属于参数空间 R^n 内的一个子集 Θ_0, $y_k \in R$ 和 $\phi_k \in R^n$ 是在时刻 k 可得到的信号, e_k 是未知噪声项. 设 e_k 有界且其界 ε_k 已知,即

$$|e_k| \leqslant \varepsilon_k, \quad k = 1,2,\cdots. \tag{2}$$

---

1)国家“八六三”高技术计划资助项目.
收稿日期　1996-05-10

由式(1)和(2)可得

$$|y_k - \phi_k^{\mathrm{T}}\theta^*| \leqslant \varepsilon_k, \quad k = 1,2,\cdots. \tag{3}$$

定义

$$S_k: = \{\theta: |y_k - \phi_k^{\mathrm{T}}\theta| \leqslant \varepsilon_k; \theta \in R^n\},\ k = 1,2,\cdots, \tag{4}$$

则由上述先验信息和前 k 组数据可以导出 $\theta^* \in \Theta_k^0$,其中

$$\Theta_k^0 = \Theta_0 \bigcap_{i=1}^{k} S_i. \tag{5}$$

由于 Θ_k^0 形状复杂,很难精确描述,因此人们更关心描述简单且尽可能紧地包含 Θ_k^0 的子集 Θ_k. 寻求这种 Θ_k 的算法就是集员辨识算法. 本文第3节所介绍的 OBE 算法就是一种集员辨识算法. 在分析 OBE 算法对误差界低估的鲁棒性之前,先给出以下定义.

定义1. 对由式(1)所描述的系统,设 Θ_k 是由某一集员辨识算法对 k 组数据进行处理后所得的一个集合,如果存在一个有界集 Θ^*,使得

$$\theta^* \in \Theta^*, \tag{6}$$

$$\lim_{k\to\infty}\Theta_k = \Theta^*, \tag{7}$$

则称该集员辨识算法是收敛的. 如果即使在这 k 组数据中存在某些不满足式(2)条件的点,此集员辨识算法仍然是收敛的,则称该算法是鲁棒收敛的,简称为鲁棒的.

定义2. 对由式(1)所描述的系统,设 Θ_k 是由某一集员辨识算法对 k 组数据进行处理后所得的一个集合,当在这 k 组数据中存在某些不满足式(2)条件的点时,如果存在一个有界的非空集合 Θ',使得

$$\theta^* \notin \Theta', \tag{8}$$

$$\lim_{k\to\infty}\Theta_k = \Theta' \tag{9}$$

成立,则称该集员辨识算法的非鲁棒性是不可检测的;反之,如果不存在有界的非空集合 Θ',使得式(9)成立,则称该集员辨识算法的非鲁棒性是可检测的.

3　OBE 算法

对由式(1)所描述的系统,设 e_k 由式(2)界定,θ^* 的先验知识如下给定:

$$\theta^* \in \Theta_0: = \{\theta: \theta^{\mathrm{T}} P_0^{-1}\theta \leqslant 1; \theta \in R^n\}, \tag{10}$$

其中 $P_0^{-1} = \delta I$,δ 是小正数,那么 OBE 算法可产生如下定义的 θ 的椭球集

$$\Theta_k: = \{\theta: (\theta - \theta_k)^{\mathrm{T}} P_k^{-1}(\theta - \theta_k) \leqslant \sigma_k^2; \theta \in R^n\}, \tag{11}$$

其中 P_k,θ_k 和 σ_k 由递推算法求得. 文献[3,4]给出了几种递推的 OBE 算法.

4　主要结果

引理[6]. 设 S_k 和 Θ_k 分别由式(4)和(11)定义,则当且仅当

$$\varepsilon_k < |v_k| - \sqrt{G_k}\sigma_{k-1} \tag{12}$$

时,$S_k \cap \Theta_{k-1} = \varnothing$,其中

$$v_k = y_k - \phi_k^{\mathrm{T}}\theta_{k-1}, \quad G_k = \phi_k^{\mathrm{T}} P_{k-1}\phi_k. \qquad (13),(14)$$

定理. 如果用 OBE 算法辨识系统(1)的参数，而在某些 k 值时式(2)不能满足，则有下述结论：

1)当且仅当存在某一时刻 k，使得

$$\varepsilon_k < |\nu_k| - \sqrt{G_k \sigma_{k-1}}, \tag{15}$$

OBE 算法的非鲁棒性是可检测的；

2)设对任意小的 h 和 α 以及回归向量空间中的任一非零向量 $\boldsymbol{q}$，存在一个无穷子系列 $\{k_s\} \subset \{k\}$，使得

$$P\{|\varepsilon_k - |e_k|| < h\} \geqslant c_1 h, \quad \forall\, k \in \{k_s\}, \tag{16}$$

$$P\{\mathrm{ang}(\boldsymbol{\phi}_k, \boldsymbol{q}) < \alpha \,|\, |\varepsilon_k - |e_k|| < h\} \geqslant c_2 \alpha, \tag{17}$$

那么如果 OBE 算法的非鲁棒性是不可检测的，则它几乎一定是鲁棒收敛的.

注. 上述 $P\{\cdot\}$表示事件的概率，ang$(\cdot,\cdot)$表示两向量之间的夹角. 条件(16)在文献[5]中表示为$\{e_k\}$是一致条件重尾的，条件(17)相当于文献[5]中对$\{\boldsymbol{\phi}_k\}$全方向性的要求.

证明. 定理的第1部分可很容易由定义2和引理推出. 这里仅证明第2部分.

由定义2可知，如果 OBE 算法是不可检测非鲁棒的，则有 Θ' 存在，使得式(8)，(9)成立，定义

$$\Theta' := \{\boldsymbol{\theta} : (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')^{\mathrm{T}} P'^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \leqslant 1; \boldsymbol{\theta} \in R^n\}, \tag{18}$$

由式(8)可知，存在一个 $\delta>0$，使得下式成立

$$(\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}')^{\mathrm{T}} P'^{-1} (\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}') = 1 + \delta. \tag{19}$$

又由式(9)知，对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正整数 M，使得当 $k>M$ 时，有

$$\Theta_{k-1} \subset \Theta(M,\varepsilon) := \{\boldsymbol{\theta} : (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}')^{\mathrm{T}} P'^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') \leqslant 1 + \varepsilon\delta\}. \tag{20}$$

OBE 算法不可检测非鲁棒性所隐含的一个必要条件是，对于任意的时间 k，均有 S_k 与Θ_{k-1}相交. 考虑到式(20)可知，如果 OBE 算法是不可检测非鲁棒的，则对所有 $k>M$，S_k 均与 $\Theta(M,\varepsilon)$相交. 由引理可以导出相应的条件为

$$\varepsilon_k \geqslant |\nu'_k| - \sqrt{G'_k}, \tag{21}$$

其中

$$v'_k = y_k - \boldsymbol{\phi}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\theta}', \quad G'_k = (1 + \varepsilon\delta) \boldsymbol{\phi}_k^{\mathrm{T}} P' \boldsymbol{\phi}_k. \tag{22),(23}$$

将式(22)和(1)代入式(21)可得

$$|\boldsymbol{\phi}_k^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}') + e_k| \leqslant \varepsilon_k + \sqrt{G'_k}. \tag{24}$$

定义事件及其概率

$$E_{1k} := \{|\boldsymbol{\phi}_k^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}') + e_k| \leqslant \varepsilon_k + \sqrt{G'_k}\}, \tag{25}$$

$$E_{2k} := \{|\boldsymbol{\phi}_k^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}') + e_k| > \varepsilon_k + \sqrt{G'_k}\}, \tag{26}$$

$$p_{1k} := P\{E_{1k}\}, \tag{27}$$

$$p_{2k} := P\{E_{2k}\}, \tag{28}$$

当 $k \in \{k_s\}$时，有

$$p_{2k} > P\left\{ |\boldsymbol{\phi}_k^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}') + e_k| > \varepsilon_k + \sqrt{G'_k} \,\middle|\, |\varepsilon_k - |e_k|| < h \right\} \cdot P\left\{ \left|\varepsilon_k - |e_k|\right| < h \right\} >$$

$$c_1 h \cdot P\left\{\operatorname{sgn}(e_k)\phi_k^{\mathrm{T}}(\theta^* - \theta') - \sqrt{G_k'} > h \,\middle|\, \left|\varepsilon_k - |e_k|\right| < h\right\}. \tag{29}$$

定义 $\beta := \operatorname{ang}[P'^{\frac{1}{2}}\phi_k, \operatorname{sgn}(e_k)P'^{-\frac{1}{2}}(\theta^* - \theta')]$. 考虑到 P' 是对称正定矩阵,因此有

$$\operatorname{sgn}(e_k)\phi_k^{\mathrm{T}}(\theta^* - \theta') = \|P'^{\frac{1}{2}}\phi_k\| \cdot \|P'^{-\frac{1}{2}}(\theta^* - \theta')\|\cos\beta = \frac{\sqrt{G_k'}}{\sqrt{1+\varepsilon\delta}} \cdot \sqrt{1+\delta} \cdot \cos\beta. \tag{30}$$

所以

$$P\left\{\operatorname{sgn}(e_k)\phi_k^{\mathrm{T}}(\theta^* - \theta') - \sqrt{G_k'} > h \,\middle|\, \left|\varepsilon_k - |e_k|\right| < h\right\} =$$

$$P\left\{\frac{\sqrt{G_k'}}{\sqrt{1+\varepsilon\delta}} \cdot \sqrt{1+\delta}\left[\cos\beta - \frac{\sqrt{1+\varepsilon\delta}}{\sqrt{1+\delta}}\right] > h \,\middle|\, \left|\varepsilon_k - |e_k|\right| < h\right\}. \tag{31}$$

考虑到式(17)可知,当 ε 和 h 足够小时,上式大于0,记

$c_3 := \min\limits_k \left\{P\left\{\operatorname{sgn}(e_k)\phi_k^{\mathrm{T}}(\theta^* - \theta') - \sqrt{G_k'} > h \,\middle|\, \left|\varepsilon_k - |e_k|\right| < h\right\}\right\} > 0$,则有

$$p_{2k} > c_1 c_3 h > 0. \tag{32}$$

因此

$$p_{1k} = 1 - p_{2k} < 1. \tag{33}$$

所以有

$$\prod_{\substack{s=1 \\ k_s > M}}^{\infty} p_{1k_s} = 0. \tag{34}$$

式(34)意味着 OBE 算法为不可检测非鲁棒性的概率为0.　　证毕.

参 考 文 献

1 Milanese M, Vicino A. Optimal estimation theory for dynamic systems with set membership uncertainty: an overview. *Automatica*, 1991, **27**(6): 997—1009

2 Milanese M, Belforte G. Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors: linear families of models and estimators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1982, **AC—27**(2): 408—414

3 Fogel E, Huang Y F. On the value of information in system identification——bounded noise case. *Automatica*, 1982, **18**(2): 229—238

4 Nayeri M, Liu M S, Deller Jr J R. Do interpretable optimal bounding ellipsoid algorithms convergence? Part Ⅰ: The long awaited set convergence proof. In: Proc. SYSID'94 (Copenhagen, Denmark), 1994, **3**: 389—394

5 Veres S M, Norton J P. Structure selection for bounded parameter models: consistency conditions and selection criterion. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1991, **AC-36**(4): 474—481

6 孙先仿. 集员辨识——算法、收敛性和鲁棒性[学位论文]. 北京:中国科学院自动化研究所, 1994

ROBUSTNESS OF OBE ALGORITHMS TO UNDERESTIMATION OF ERROR BOUNDS

SUN XIANFANG
(*Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083)
(*Laboratory of Complex Systems Engineering, Institute of Automation, Academia Sinica, Beijing* 100080)
ZHANG ZHIFANG
(*Institute of Management, Chinese University of Science and Technology, Beijing* 101408)
NING WENRU　FAN YUEZU
(*Department of Automatic Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing* 100083)

Abstract The main result of this paper is that the optimal bounding ellipsoid (OBE) algorithms used to identify systems with unknown but bounded (UBB) errors are robust to underestimation of error bounds, *i.e.*, any OBE algorithm can remain its convergence under certain conditions even if the error bounds are underestimated. This result can be used in parameter estimation of practical systems with unknown error bounds, and less conservative identification results can be expected.

Key words OBE algorithms, UBB error, set membership identification, convergence, robustness.

1997年为本刊审稿者名单

丁明跃　丁晓青　丁　锋　万百五　于尔铿　于年才　于景元　马小亮　马竹梧　马保离
马颂德　尹万朝　文传源　毛剑琴　毛绪瑾　王大均　王子栋　王广雄　王书宁　王加存
王占林　王正志　王　龙　王　伟　王先来　王执铨　王纪文　王行愚　王秀峰　王　忠
王　炎　王炎生　王诗宓　王金枝　王　珏　王顺晃　王家厥　王恩平　王　晓　王晓东
王浣尘　王离九　王梅生　王朝珠　王照林　邓子辰　邓永录　邓自立　邓志东　冯元琨
冯纯伯　冯国楠　冯昭枢　冯德兴　卢桂章　史定华　史忠科　史忠植　史　维　叶正明
叶庆凯　叶银忠　田玉平　田成方　田树苞　白峰杉　白　硕　石纯一　石青云　边肇祺
仲伟俊　任学梅　伍清河　刘一军　刘大友　刘长有　刘永清　刘　伟　刘自宽　刘　克
刘宗富　刘彦佩　刘贺平　刘晓平　刘艳明　刘康生　华向明　孙凤媛　孙优贤　孙　西
孙振东　孙常胜　孙富春　孙增圻　安鸿志　安森健　朱志刚　朱宗林　朱美君　朱淼良
许可康　邢科义　贠　超　何善堉　何新贵　佘　焱　余达太　佟绍成　初学导　吴文虎
吴立德　吴宏鑫　吴沧浦　吴秋峰　吴哲辉　吴恩华　吴智铭　吴福朝　吴　麒　宋　宇
宋春平　张乃尧　张元林　张化光　张天平　张长水　张永光　张立昂　张戎军　张纪峰
张怀宙　张学工　张承福　张贤达　张洪钺　张恭清　张　钹　张　铃　张鸿宾　张嗣瀛
张　霖　张炘中　忻　欣　李介谷　李友善　李少远　李训经　李　伟　李光泉　李叔梁

（下转第797页）