

非最小相位不稳定对象的 鲁棒最优模型匹配

吴旭东 钟宜生 解学书

(清华大学自动化系 北京 100084)

摘要 研究了单输入单输出(SISO)线性时不变系统的鲁棒最优模型匹配问题. 采用二自由度的控制器, 对于被控对象具有乘性摄动时, 充分考虑控制器的自由参数, 将问题转化成有约束的 H_∞ 控制问题, 使闭环系统既是 H_∞ 范数意义下的最优模型匹配, 又具有更大的鲁棒稳定性. 最后, 通过解两个 H_∞ 范数的最优内插问题, 给出了一种新的设计方法来确定控制器的参数. 该方法简单、直接, 对非最小相位系统和不稳定系统均适用.

关键词 模型匹配, H_∞ 控制, 鲁棒稳定性, H_∞ 内插.

ROBUST OPTIMAL MODEL MATCHING FOR THE NON-MINIMUM PHASE AND UNSTABLE PLANTS

WU Xudong ZHONG Yisheng XIE Xueshu

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084 P. R. China)

Abstract Robust optimal model matching problem for the single-input and single-output linear time-variant systems is dealt with in this paper. A two-degrees-of-freedom controller is used. For the case of the non-minimum phase plants with multiplicative perturbations, the problem of robust stability of closed-loop system under the conditions of optimal model matching is transferred into a constrained H_∞ optimization problem. A new method for determining parameters of the controller is given, which involves solving an H_∞ interpolation problem.

Key words Model matching, H_∞ control, robust stability, H_∞ interpolation.

1 引言

模型匹配的目标是选择合适的控制器, 使闭环系统的传递函数完全匹配理想的参考模型的传递函数. 在模型匹配中, 控制器有许多自由参数, 可以充分利用这些自由参数以达到控制系统所要求的其它性能指标^[2]. 文献[1, 3, 4]研究了具有测量噪声时的模型匹配问题. 但是, 如何利用这些自由参数, 以提高控制系统的鲁棒性的论述却很少. 文献[5, 6]提出了基于等价干扰概念的鲁棒模型匹配控制器的设计方法, 但只限于摄动后的对象是

最小相位的系统. 由于模型匹配是建立在零极相消基础上的控制^[1-4], 因此讨论其鲁棒稳定性就显得非常重要. 而本文的研究表明正是这些自由参数的选择严重影响着系统的鲁棒性能, 不适当的自由参数会使系统的鲁棒性能变得很差.

本文首先讨论了基于 H_∞ 范数优化最优模型匹配问题^[8], 导出了在 H_∞ 范数意义下的最优模型匹配条件. 然后, 考虑当对象模型具有一般的乘性摄动时, 在满足最优模型匹配条件下, 将如何选择控制器的自由参数以提高闭环系统的鲁棒稳定性的问题, 转化为一个有限制条件的 H_∞ 控制问题, 进而转化成 H_∞ 范数的最优内插问题求解. 这样的控制系统既能达到跟踪性能的要求, 又保证了系统的鲁棒稳定性. 本文确定控制器参数的方法有着与现有方法不同的特点. 文中 $\deg[\cdot]$ 表示多项式 $[\cdot]$ 的阶次. 表示 $H = \{f(s) | f(s) \text{ 是 Hurwitz 多项式}\}$. 函数 $T(s)$ 的无穷范数定义为

$$\|T(s)\|_\infty = \sup_{\forall \omega \in R} |T(j\omega)|.$$

2 基于 H_∞ 优化的最优模型匹配

考虑图1所示的 SISO 线性时不变的模型匹配系统^[1,3,4]. 其中: r, y_m, u, y 分别为参考输入, 参考对象 $G_m(s)$ 的输出, 被控对象 $G(s)$ 的输入、输出; $p(s), k(s), h(s), q(s)$ 是二自由度控制器^[1-4]的待定多项式; 且 $G_m(s)$ 为稳定的最小相位系统; $\deg[a(s)] = n, \deg[b(s)] = m, \deg[p(s)] + \deg[b_m(s)] = \deg[a_m(s)], \deg[k(s)] \leq \deg[q(s)], \deg[h(s)] \leq \deg[q(s)]$. (在不至于引起混淆的情况下, 文中一律省略算子 s)

- 假设. 1) $0 \leq m \leq n, n \geq 1$;
 2) a 和 b 互质, a_m 和 b_m 互质;
 3) ^[10] a 和 b 在虚轴上没有零点;
 4) $\deg[a_m] - \deg[b_m] \geq n - m$.

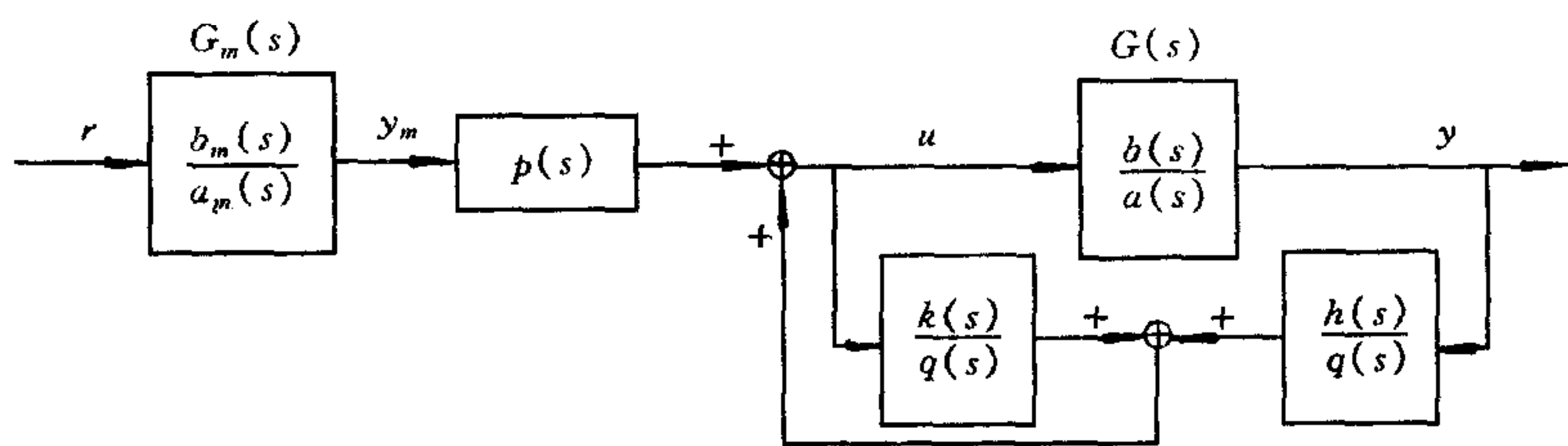


图1 模型匹配系统的结构

说明. 假设1)和2)对于一般因果的物理系统都满足; 3)是为了保证无穷范数的存在性; 4)是为了保证参考对象和控制器所组成的系统是真有理函数.

由图1知, 控制律为

$$u = \frac{k}{q}u + \frac{h}{q}y + py_m. \quad (1)$$

注1. $pG_m, k/q, h/q$ 均为物理上可实现的因果系统. 实现时, 取 $py_m = pG_m r$.

从 y_m 到 y 的闭环传递函数为

$$y = \frac{pqb}{a(q-k) - hb} y_m = G_c \cdot y_m. \quad (2)$$

在 H_∞ 范数意义下极小化下面最优模型匹配的指标函数为

$$\min \|G_e\|_\infty = \min \|G_m(1 - G_c)\|_\infty. \quad (3)$$

将式(2)代入式(3)得

$$G_e = \frac{b_m}{a_m} \left[1 - b^- \frac{b^+ pq}{a(q-k) - hb} \right], \quad (4)$$

其中 $b = b^- b^+$, b^- 为不稳定的部分, b^+ 为稳定的部分.

令 $v_b = \deg[b^-]$ 表示 b^- 的零点数目, $b_i (1 \leq i \leq v_b)$ 是 b^- 零点, 则有

$$G_e(b_i) = G_m(b_i), \quad (1 \leq i \leq v_b). \quad (5)$$

注2. 当 b^- 有 j 个重复零点 b_i 时, 必须加上 L 阶导数的限制条件

$$G_e^{(L)}(b_i) = G_m^{(L)}(b_i), L = 1, 2, \dots, j.$$

式(3)的 H_∞ 优化问题转化为下述 v_b 点 H_∞ 范数的最优内插问题^[3,7].

引理1^[3,7]. v_b 点 H_∞ 范数的最优内插问题的解存在且唯一, 即

$$G_e^* = \begin{cases} \gamma_1 \frac{\bar{\beta}}{\beta}, & (v \geq 1), \\ 0, & (v = 0), \end{cases} \quad (6)$$

$$\min_{G_e \text{ 稳定}} \|G_e\|_\infty = \|G_e^*\|_\infty = |\gamma_1|, \quad (7)$$

其中 $\beta(s) = 1 + \beta_1 s + \dots + \beta_{v_b-1} s^{v_b-1} \in H$; $\bar{\beta}(s) = \beta(-s)$; γ_1 和 $\beta_i (1 \leq i \leq v_b - 1)$ 是实的, 且由式(5)的插值限制条件唯一决定.

根据引理1, 解由式(5)的插值限制条件所组成的含有 v_b 个未知数 [γ_1 和 $\beta_i (1 \leq i \leq v_b - 1)$] 的 v_b 个方程, 得 γ_1, β . 结合式(6), (7), (4)得

$$\frac{b^- b^+ pq}{a(q-k) - hb^- b^+} = \frac{b_m \beta - \gamma_1 a_m \bar{\beta}}{b_m \beta}. \quad (8)$$

由式(5)的插值限制条件知 $b_m \beta - \gamma_1 a_m \bar{\beta}$ 中必含有因子 b^- , 即存在多项式 f 满足

$$b_m \beta - \gamma_1 a_m \bar{\beta} = b^- f. \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)得

$$b^+ (b_m \beta pq + f h b^-) = (q - k) f a. \quad (10)$$

由式(10)知, 存在多项式 α 使得, 式(11), (12)的最优模型匹配条件成立

$$b^+ \alpha = q - k, \quad (11)$$

$$f a \alpha = b_m \beta pq + f h b^-. \quad (12)$$

注3. 本文是先通过解第3节中有约束的 H_∞ 优化问题确定 α, h , 再由最优模型匹配条件确定其它的待定多项式 p, q, k . 这与文献[1, 3, 4]中确定这些控制器参数的方法不同.

3 鲁棒最优模型匹配

考虑被控对象的模型具有下述乘性摄动^[7,9]

$$y = G[1 + W\Delta]u, \quad (13)$$

其中摄动后的 $G[1 + W\Delta]$, G 有相同数目的不稳定极点; $W = w_b/w_a$ 是加权函数, 且 w_b 和 w_a 互质, $w_b, w_a \in H$. 当 G 没有不稳定零点时, W 不能为常数, 以保证后面的插值限制条件有解. 文献[6]中也考虑了乘性摄动, 但它要求摄动后的被控对象仍是最小相位的. 本文

没有这样的限制.

定理1. 如果采用式(1)的控制律,则具有乘性摄动的闭环系统的稳定性与图2中系统的稳定性等价,其中

$$K = h/(q - k), \quad (14)$$

$$G_d = -WGK/(1 - GK). \quad (15)$$

证明. 由式(1),式(13)得

$$y = \frac{pqb[1 + W\Delta]}{a(q - k) - hb - hbW\Delta} y_m, \quad (16)$$

分析式(16)的特征多项式即可得证.

根据文献[7,9]中的结论,结合图2则可以得到下述定理.

定理2. 如果对所有满足: $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$ ($0 < \gamma \leq \infty$) 的摄动 Δ , 图2所示的系统内部稳定, 当且仅当 K 使 G_d 稳定, 且满足 $\|G_d\|_\infty \leq \gamma$.

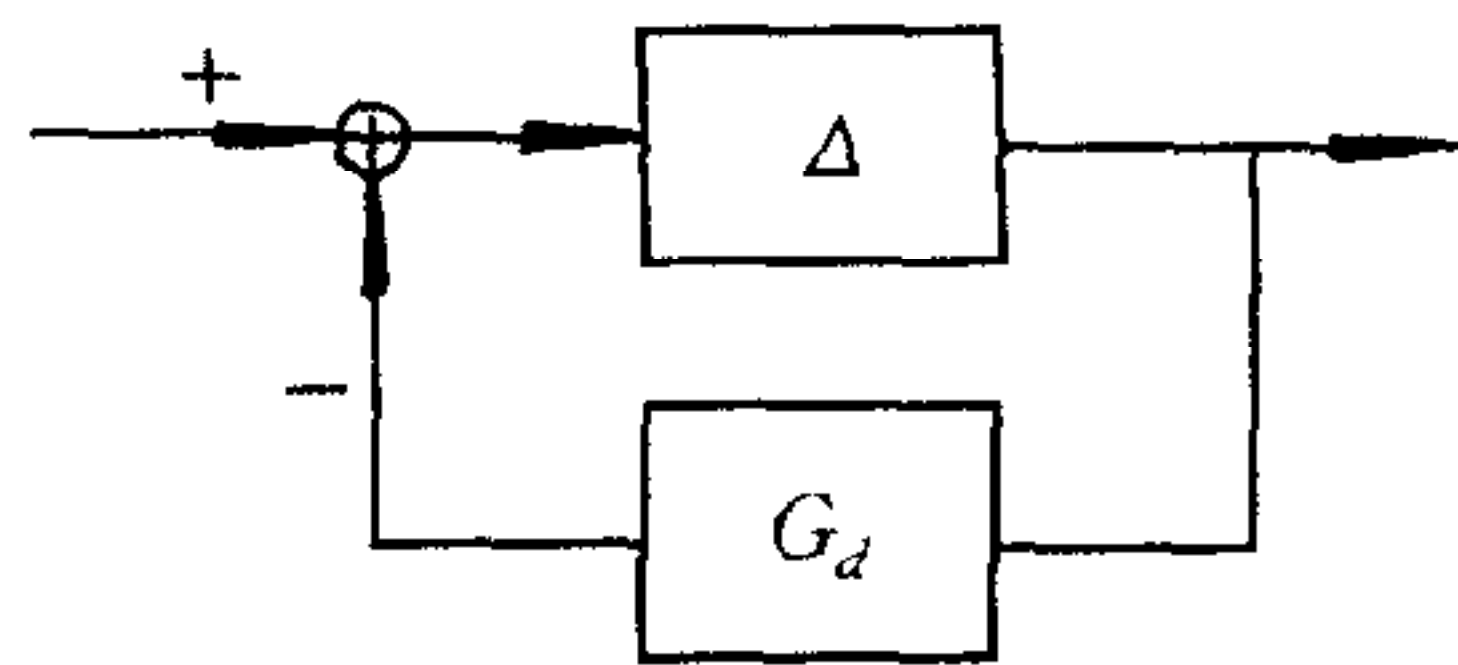


图2 等价系统

根据定理2,显然选定加权函数 W 后,只要找到最小的 γ ,就能使闭环系统所允许的乘性摄动的不确定界 $1/\gamma$ 最大,即鲁棒性最强.

那么,结合上节,如何既满足最优模型匹配条件,又能尽量提高闭环系统鲁棒稳定性的控制问题转化为下列等价问题.

鲁棒最优模型匹配问题:如何选择真实有理的 K ,使得具有乘性摄动的闭环系统在满足最优模型匹配条件的同时达到

$$\min_{K \text{ 使 } G_d \text{ 稳定}} \|G_d\|_\infty = |\gamma_2|, \quad (17)$$

这是带限制条件的加权 H_∞ 控制问题^[2,7,9].

注4. 由式(15),(17)知,为保证 K 是真实有理函数,加权函数 W 可以是非真的有理函数,且 $\deg[w_b] - \deg[w_a] = n - m$, 但为降低 K 的阶次, $\deg[w_a]$ 应尽量低;同时,不妨取 $\min |W| = 1$ (如不等于1,总可以将它归入 γ_2 中),这样, $|W/\gamma_2|$ 可看成高频未建模摄动界,加权函数 W 的选择方法可参照文献[11]中方法.

将最优模型匹配条件及式(14)代入式(15)得

$$G_d = W \frac{-hb^-}{a\alpha - hb^-} = W \left[1 - \frac{a\alpha}{a\alpha - hb^-} \right]. \quad (18)$$

注5. 根据式(18)可以看到,如果自由参数 α, p 和 q ^[1-4] 选择得不合适,将会使系统的鲁棒性很差.

因此,鲁棒最优模型匹配问题变为:选择 α 和 h ,使得

$$|\gamma_2| = \min_{\alpha, h \text{ 使 } G_d \text{ 稳定}} \|G_d\|_\infty = \min_{\alpha, h \text{ 使 } G_d \text{ 稳定}} \left\| W \frac{-hb^-}{a\alpha - hb^-} \right\|_\infty = \quad (19)$$

$$\min_{\alpha, h \text{ 使 } G_d \text{ 稳定}} \left\| W \left[1 - a^- \frac{a^+ \alpha}{a^- a^+ \alpha - hb^-} \right] \right\|_\infty, \quad (20)$$

其中 $a = a^- a^+$, a^- 和 a^+ 分别为不稳定和稳定的部分.

令 $v_a = \deg[a^-]$ 表示 a^- 的零点数目, a_i ($1 \leq i \leq v_a$) 是 a^- 零点,则由式(20)得

$$G_d(a_i) = W(a_i), (1 \leq i \leq v_a). \quad (21)$$

注6. 当 a^- 的有 j_a 个重复零点 a_i 时, 必须加上 L 阶导数的限制条件

$$G_d^{(L)}(a_i) = W^{(L)}(a_i), L = 1, 2, \dots, j_a.$$

而且, 由式(19)得

$$G_d(b_i) = 0, (1 \leq i \leq v_b). \quad (22)$$

满足式(21), 式(22)的 H_∞ 控制问题转化为下述 v_a 点 H_∞ 范数的最优内插问题^[3,7].

引理2^[3,7]. v_a 点 H_∞ 范数的最优内插问题的解存在且唯一, 即

$$G_d^* = \begin{cases} \gamma_2 \frac{\bar{\eta}b^-}{\eta\bar{b}^-}, & (v_a \geq 1), \\ 0, & (v_a = 0), \end{cases} \quad (23)$$

$$\min_{\alpha, h \text{ 使 } G_d \text{ 稳定}} \|G_d\|_\infty = \|G_d^*\|_\infty = |\gamma_2|, \quad (24)$$

其中 $\eta(s) = 1 + \eta_1 s + \dots + \eta_{v_a-1} s^{v_a-1} \in H$; γ_2 和 $\eta_i (1 \leq i \leq v_a - 1)$ 是实的, 且由式(21)的插值限制条件唯一决定; $\bar{\eta}(s) = \eta(-s)$; $\bar{b}^-(s) = b^-(-s)$.

根据引理2, 解由式(21)的插值限制条件所组成的含有 v_a 个未知数 [γ_2 和 $\eta_i (1 \leq i \leq v_a - 1)$] 的 v_a 个方程, 得 γ_2, η . 结合式(23), (24), (20)得

$$a^- \frac{a^+ \alpha w_b}{[a^- a^+ \alpha - hb^-] w_a} = \frac{\bar{\eta}b^- w_b - \gamma_2 \bar{\eta}b^- w_a}{\eta\bar{b}^- w_a}. \quad (25)$$

根据式(21)的插值限制条件知 $\bar{\eta}b^- w_b - \gamma_2 \bar{\eta}b^- w_a$ 中必含有因子 a^- . 因此, 对任意多项式 $t \in H$, 由式(25)得

$$a^- \alpha = (\bar{\eta}b^- w_b - \gamma_2 \bar{\eta}b^- w_a) t, \quad (26)$$

$$a^- a^+ \alpha - hb^- = a^+ \bar{\eta}b^- w_b t. \quad (27)$$

注7. 当被控对象没有不稳定零点时, 即 $b^- = 1$. 此时, $\eta w_b - \gamma_2 \bar{\eta} w_a$ 中必含有因子 a^- , 而 $\deg[a^-] = v_a, \deg[\eta] = v_a - 1$. 因此, 为满足这一阶次限制条件, 当被控对象没有不稳定零点时, 加权函数 W 不能为常数.

将式(26)代入式(27)得

$$h = -\gamma_2 a^+ \bar{\eta} w_a t. \quad (28)$$

将式(27)代入式(12)得

$$b_m \beta p q = f(a\alpha - hb^-) = f a^+ \bar{\eta}b^- w_b t, \quad (29)$$

由 t 的任意性, 令

$$t = b_m \beta t_1, \quad (30)$$

其中任意多项式 $t_1 \in H$.

将式(30)代入式(29), (28), (26)分别得

$$p q = a^+ \bar{\eta}b^- f w_b t_1, \quad (31)$$

$$h = -\gamma_2 a^+ \bar{\eta} w_a b_m \beta t_1, \quad (32)$$

$$\alpha = \frac{\bar{\eta}b^- w_b - \gamma_2 \bar{\eta}b^- w_a}{a^-} b_m \beta t_1. \quad (33)$$

分别比较式(33), (32), (31)的两端, 可得到 α, h, q 的阶次分别为

$$\deg[\alpha] = \deg[\eta] - v_a + \deg[w_b] + \deg[b_m] + \deg[t_1] + \deg[\beta] + v_b,$$

$$\deg[h] = n - v_a + \deg[\eta] + \deg[w_a] + \deg[b_m] + \deg[t_1] + \deg[\beta],$$

$$\deg[q] = n - v_a + \deg[\eta] + \deg[w_b] + \deg[a_m] - \deg[p] + \deg[t_1] + \deg[\beta].$$

再利用 $\deg[w_b] - \deg[w_a] = n - m$ 和 $\deg[a_m] = \deg[b_m] + \deg[p]$ 得

$$\deg[h] - \deg[\alpha] = m - v_b,$$

$$\deg[q] - \deg[h] = n - m + \deg[\beta] \geq 0,$$

这表明控制器是真有理函数.

综上所述,把解鲁棒最优模型匹配问题的算法步骤归纳如下:

- 1) 考虑闭环系统的动态性能选择参考模型 G_m , 并按注4的要求选择加权函数 W , 尤其应注意它们的阶次限制;
- 2) 解由式(5)的插值限制条件所组成的含有 v_b 个未知数 $[\gamma_1$ 和 $\beta_i (1 \leq i \leq v_b - 1)]$ 的 v_b 个方程, 得 γ_1 和 β_i ;
- 3) 由待定系数法, 解式(9)得多项式 f ;
- 4) 解由式(21)的插值限制条件所组成的含有 v_a 个未知数 $[\gamma_2$ 和 $\eta_i (1 \leq i \leq v_a - 1)]$ 的 v_a 个方程, 得 γ_2 和 η_i ;
- 5) 任选 $t_1 \in H$, 分别由式(32)和式(33)得到多项式 α, h ;
- 6) 由式(31)确定多项式 p 和 q ;
- 7) 根据式(11), 直接计算 $k = q - b^+ \alpha$.

4 结论

本文研究鲁棒最优模型匹配问题, 通过适当选择模型匹配控制器中的自由参数, 在对标称对象实现最优模型匹配的前提下, 提高系统对模型摄动的鲁棒稳定性. 将具有乘性摄动的最优模型匹配的鲁棒性问题转化为有约束的加权 H_∞ 控制问题, 进而转化为 H_∞ 最优内插问题. 文中给出了鲁棒最优模型匹配控制器的具体设计步骤.

参 考 文 献

- 1 Ichikawa K. Exact model matching for the plants with unmodelled dynamics. In: Proc. of the 13th IFAC World Congress. San Francisco, USA, 1996, 381-386
- 2 Vidyasagar M. Control System Synthesis: a Fractional Approach. Cambridge, MA: M. I. T. Press, 1985
- 3 Chen B R, Wang S S, Lu H C. Minimal sensitivity perfect model matching control. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1989, **34**(12): 1279-1282
- 4 Mutoh Y, Nikiforuk. P N. Suboptimal perfect model matching for a plant with measurement noise and its application to MRACS. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, **39**(2): 422-425
- 5 Zhong Y S. Robust model matching control system design for SISO plants with large perturbations. In: Proc. of the 31st IEEE CDC. , 1992
- 6 Zhong Y S. Low order robust model matching for SISO plants with structured and unstructured perturbations. In: Proc. of the 13th IFAC World Congress. San Francisco USA, 1996, 459-464
- 7 解学书, 钟宜生. H_∞ 控制理论. 北京: 清华大学出版社, 1994
- 8 Huang C L, Chen B S. Adaptive control of optimal model matching in H_∞ norm space. IEE In: Proc. , 1988, **135**(4): 295-301
- 9 Francis B A, Doyle J C. Linear control theory with an H_∞ optimality criterion. *SIAM J. Control and Optimization*, 1987, **25**(4): 815-844

- 10 Zames G, Francis B A. Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1983, **28**(5):585—601
- 11 吴旭东, 解学书. H_∞ 鲁棒控制中的加权阵选择. 清华大学学报(自然科学版), 1997, **37**(1):27—30

吴旭东 1967年生. 1990年毕业于清华大学自动化系, 现为清华大学自动化系博士研究生. 主要从事 H_∞ 鲁棒控制理论及其应用、鲁棒辨识、鲁棒自适应控制等方面的研究工作.

钟宜生 1982年毕业于哈尔滨工业大学. 1988年于日本北海道大学取得博士学位, 1991年于清华大学博士后流动站出站后留校任教. 主要从事鲁棒控制理论及其应用方面的研究.

《自动化学报》征稿简则

一、《自动化学报》是中国自动化学会和中国科学院自动化研究所主办的全国性高级学术期刊, 双月刊. 在美国出版英译版, 季刊.

二、本刊刊载自动化科学与技术领域的高水平理论性和应用性学术论文. 内容包括: 1. 自动控制理论; 2. 系统理论与系统工程; 3. 自动化技术及其在国民经济各领域中的创造性应用; 4. 自动化系统计算机辅助技术; 5. 机器人与自动化; 6. 人工智能与智能控制; 7. 自动控制系统中的新概念、新原理、新方法、新设计; 8. 自动化学科领域的其它重要问题.

三、本刊以发表论文和短文为主, 并不定期地发表综述文章、问题讨论、书刊评论、国内外学术活动信息等.

四、本刊不接受已在国内外期刊上发表(包括待发表)的稿件, 但不排除已在国内外学术会议上发表或准备发表的优秀论文(对于此种情况, 作者必须在稿件首页脚注说明).

五、稿件内容的正确性、真实性和可靠性由作者自行负责.

六、来稿一式三份寄北京中关村中国科学院自动化研究所《自动化学报》编辑部. 邮编100080. 编辑部在收稿后一周内寄送回执. 作者请自留底稿, 稿件概不退还. 稿件是否录用一般在半年内通知作者.

七、稿件刊登与否由本刊编委会最后审定, 已被接受的稿件需严格按审查意见和《作者加工稿件须知》修改并一式两份寄编辑部. 同时与编辑部签订版权协议.

八、编委会对来稿作适当文字删改或退请作者修改. 文章发表后, 按篇酌致稿酬, 并赠送30本抽印本, 在稿件的修改及联系过程中, 如果不特殊说明, 本刊只与第一作者联系.

九、来稿格式及要求:

1. 来稿要求论点明确, 论证严格, 语言通顺, 文字简练, 一般定稿时长论文12000字; 普通论文尽量不超过6000字; 短文不超过3000字; 其它形式文章视具体内容由编辑部决定.

2. 论文和短文的文章结构请参照本刊近期发表的文章格式, 论文摘要限制在200字左右, 其内容包括研究目的、方法、结果和结论等. 文中非标准缩写词(中文或英文)须在首次出现时定义清楚, 公式、图、表均须分别用阿拉伯数字全文统一编号.

(下转190页)