第25卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol. 25, No. 1
1999年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1999

短 文

摄动离散 LYAPUNOV 方程解的上下界估计[1)]

王子栋 郭 治
（南京理工大学自动控制系 南京 210094）

摘 要 给出了离散 Lyapunov 方程在参数摄动下正定解上、下界的一种新估计，它允许的摄动结构更为一般，且只需解两个代数 Riccati 方程，从而避免了高阶代数方程的求解. 从而为基于李雅普诺夫方程的系统分析及控制问题提供必要的理论分析基础. 数值算例说明了本文结果的优越性.

关键词 线性离散系统；参数摄动；李雅普诺夫方程.

ON THE ESTIMATION OF UPPER AND LOWER BOUNDS FOR SOLUTIONS TO PERTURBED DISCRETE LYAPUNOV EQUATIONS

WANG Zidong GUO Zhi
(*Dept. of Automatic Control*, *Nanjing Univ. of Sci. & Tech.*, *Nanjing* 210094)

Abstract A new estimation for positive definite solution to discrete Lyapunov equation with parameter disturbance is presented. The structure of its disturbance is allowed to be more general and there are only two algebra Riccati equations to solve. It avoids the difficulty in seeking solution of algebra equation of high order, and therefore offers a theoretical basis of system analysis and control design using Lyapunov equation approaches. A numerical example shows advantages of this result.

Key words Linear system, parameter perturbation, Lyapunov equation.

1 引言

考虑如下线性定常离散随机系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Dw(k), \tag{1}$$

1)国家自然科学基金(69674014)资助项目.
收稿日期 1996-03-21 收到修改稿日期 1998-01-05

这里 A 渐近稳定，$w(k)$ 为零均值单位高斯白噪声序列，当 (A,D) 可扰时，系统(1)的稳态状态协方差

$$X \triangleq \lim_{k\to\infty} E[x(k)x^{\mathrm{T}}(k)] \tag{2}$$

应是离散 Lyapunov 方程

$$X = AXA^{\mathrm{T}} + DD^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

的唯一正定解. 鉴于工程实践中 X 常被选用为随机系统的精度指标，关于方程(3)的正定或半正定解的存在性与算法研究已涌现出大量的成果，如文献[1]. 由于不可避免地存在着建模误差，因而，确定摄动离散 Lyapunov 方程正定或半正定解的上下界更具实用价值. 文献[2]研究了这一问题，然而需要求解一个四阶代数矩阵方程，且没有讨论算法. 本文继续研究了这一问题，其结果表明，期望的上下界可通过求解两个代数 Riccati 方程而获得，其中关于不确定性的假设比文献[2]更为一般.

2 问题的描述

考虑如下含结构摄动的离散 Lyapunov 方程

$$X = (A + \Delta A)X(A + \Delta A)^{\mathrm{T}} + Q. \tag{4}$$

上式中 $A\in R^{n\times n}$ 渐近稳定；$Q\in R^{n\times n}$ 且 $Q\geqslant 0$；Δ 为表示结构摄动的实值矩阵，且具有时不变结构

$$\Delta A = MFN, \tag{5}$$

式中 M,N 为适维已知常数阵，$F\in R^{i\times j}$ 为未知矩阵，且满足

$$F \in \mathscr{F} = \{F: FF^{\mathrm{T}} \leqslant I, F \text{ 的所有元素均 Lebesgue 可测}\}.$$

此时，ΔA 与 F 称为可允许的，此外，还假定 $(A+\Delta A, Q^{\frac{1}{2}})$ 可稳. 在上述条件下，寻求方程(4)解存在的充分条件，并确定其上界 $\overline{X}$ 与下界 $\underline{X}$，这是本文的目的. 这里

$$\overline{X} \geqslant X \geqslant \underline{X}. \tag{6}$$

文献[2]仅考虑了 $N=I$ 的情形，乃本文之特例.

引理1[3]. 设 $P\geqslant 0, T\geqslant 0, (A, T^{\frac{1}{2}})$ 可稳定，且

$$P = APA^{\mathrm{T}} + T, \tag{7}$$

则 A 渐近稳定.

此引理1也是文献[3]中的引理12.2的对偶形式引理12.2′.

3 主要结果及证明

定理1. 若存在常数 $\varepsilon>0$ 和对称正定阵 $\overline{X}$ 满足

$$\varepsilon N\overline{X}N^{\mathrm{T}} < I, \tag{8}$$

$$\overline{X} = A\overline{X}A^{\mathrm{T}} + A\overline{X}N^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\varepsilon}I - N\overline{X}N^{\mathrm{T}}\right)^{-1}N\overline{X}A^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon}MM^{T} + Q, \tag{9}$$

则

1) $A+\Delta A$ 对所有可允许的 ΔA 渐近稳定，

2) 方程(4)的正定解 $X>0$ 存在且满足

$$X \leqslant \overline{X}. \tag{10}$$

证明.

1)令

$$S \triangleq \left[A\overline{X}N^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\varepsilon}I - N\overline{X}N^{\mathrm{T}}\right)^{-\frac{1}{2}} - MF\left(\frac{1}{\varepsilon}I - N\overline{X}N^{\mathrm{T}}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{11}$$

则由 $FF^{\mathrm{T}} \leqslant I$ 可得

$$\begin{aligned} 0 \leqslant SS^{\mathrm{T}} = & A\overline{X}N^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\varepsilon}I - N\overline{X}N^{\mathrm{T}}\right)^{-1}N\overline{X}A^{\mathrm{T}} - \\ & [A\overline{X}(\Delta A)^{\mathrm{T}} + (\Delta A)\overline{X}A^{\mathrm{T}} + (\Delta A)\overline{X}(\Delta A)^{T}] + \frac{1}{\varepsilon}MFF^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} \leqslant \\ & A\overline{X}N^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\varepsilon}I - N\overline{X}N^{\mathrm{T}}\right)^{-1}N\overline{X}A^{\mathrm{T}} - \\ & [(A + \Delta A)\overline{X}(A + \Delta A)^{\mathrm{T}} - A\overline{X}A^{\mathrm{T}}] + \frac{1}{\varepsilon}MM^{\mathrm{T}} \triangleq \Sigma, \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} A\overline{X}A^{\mathrm{T}} + A\overline{X}N^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\varepsilon}I - N\overline{X}N^{\mathrm{T}}\right)^{-1}N\overline{X}A^{\mathrm{T}} + \frac{1}{\varepsilon}MM^{\mathrm{T}} = \\ \sum + (A + \Delta A)\overline{X}(A + \Delta A)^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{12}$$

将上式代入式(9),可得

$$\overline{X} = (A + \Delta A)\overline{X}(A + \Delta A)^{\mathrm{T}} + \Sigma + Q. \tag{13}$$

因$(A+\Delta A, Q^{\frac{1}{2}})$可稳,且$\sum \geqslant 0$,故由文献[3]中定理3、6的对偶形式知,$(A+\Delta A, (\sum + Q)^{\frac{1}{2}})$仍可稳.又因 $\overline{X}>0$,根据引理1,$A+\Delta A$ 对所有可允许的摄动 ΔA 保持渐近稳定.

2) 因 $A+\Delta A$ 渐近稳定,且$\left(A+\Delta A, Q^{\frac{1}{2}}\right)$可稳,从而方程(4)存在正定解 $X>0$. 将式(13)减去式(4),有

$$\overline{X} - X = (A + \Delta A)(\overline{X} - X)(A + \Delta A)^{\mathrm{T}} + \sum. \tag{14}$$

上式等价于

$$\overline{X} - X = \sum_{i=0}^{\infty}\left\{(A + \Delta A)^{i}\sum[(A + \Delta A)^{i}]^{\mathrm{T}}\right\} \geqslant 0, \tag{15}$$

即 $\overline{X} \geqslant X$,定理1得证.

定理2. 若存在常数 $\beta>0$和对称正定阵 $\underline{X}$ 满足如下代数 Riccati 方程

$$\underline{X} = A\underline{X}A^{\mathrm{T}} - A\underline{X}N^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\beta}I + N\underline{X}N^{\mathrm{T}}\right)^{-1}N\underline{X}A^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\beta}MM^{\mathrm{T}} + Q, \tag{16}$$

则方程(4)的正定解 X 满足

$$\underline{X} \leqslant X. \tag{17}$$

证明. 令

$$R \triangleq \left[A\underline{X}N^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\beta}I + N\underline{X}N^{\mathrm{T}}\right)^{-\frac{1}{2}} - MF\left(\frac{1}{\beta}I + N\underline{X}N^{\mathrm{T}}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{18}$$

则由 $FF^{\mathrm{T}} \leqslant I$ 可得

$$0 \leqslant RR^{\mathrm{T}} = A\underline{X}N^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\beta}I + N\underline{X}N^{\mathrm{T}}\right)^{-1}N\underline{X}A^{\mathrm{T}} +$$

$$[A\underline{X}(\Delta A)^{\mathrm{T}} + (\Delta A)\underline{X}A^{\mathrm{T}} + (\Delta A)\underline{X}(\Delta A)^{\mathrm{T}}] + \frac{1}{\beta}MFF^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} \leqslant$$

$$A\underline{X}N^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\beta}I + N\underline{X}N^{\mathrm{T}}\right)^{-1}N\underline{X}A^{\mathrm{T}} +$$

$$[(A + \Delta A)\underline{X}(A + \Delta A)^{\mathrm{T}} - A\underline{X}A^{\mathrm{T}}] + \frac{1}{\beta}MM^{\mathrm{T}} \triangleq \Phi,$$

从而有

$$A\underline{X}A^{\mathrm{T}} - A\underline{X}N^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\beta}I + N\underline{X}N^{\mathrm{T}}\right)^{-1}N\underline{X}A^{\mathrm{T}} - \frac{1}{\beta}MM^{\mathrm{T}} =$$

$$-\Phi + (A + \Delta A)\underline{X}(A + \Delta A)^{\mathrm{T}}. \tag{19}$$

将上式代入式(16)，可得

$$\underline{X} = (A + \Delta A)\underline{X}(A + \Delta A)^{\mathrm{T}} - \Phi + Q, \tag{20}$$

再将式(4)减去式(20)，有

$$X - \underline{X} = (A + \Delta A)(X - \underline{X})(A + \Delta A)^{\mathrm{T}} + \Phi. \tag{21}$$

根据定理1，$A+\Delta A$ 渐近稳定，式(21)等价于

$$X - \underline{X} = \sum_{i=0}^{\infty}[(A + \Delta A)^i\Phi((A + \Delta A)^i)^{\mathrm{T}}] \geqslant 0. \tag{22}$$

即 $X-\underline{X}\geqslant 0$，定理2得证.

方程(9)，(16)分别给出了参数摄动的离散 Lyapunov 方程(4)正定解的上、下界.很显然，它们都是代数 Riccati 方程，其形式在离散 $H\infty$控制理论中经常出现，有关此类方程的解法可参见文献[4].又，由定理1，2知，方程(4)正定解的上、下界依赖于常参数 ε,β 的选取.调整参数 ε,β，以求得使 X 与 $\overline{X}$，X 与 $\underline{X}$ 的加权范数最小的 $\overline{X}$ 与 $\underline{X}$，是谓之 Riccati 方程的优化求解过程，文献[5]对此有较详细的讨论.

4　数值算例

设参数摄动离散 Lyapunov 方程(4)中

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0.223 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta A = MFN = \begin{pmatrix} 0.049 & 0.014 \\ 0.014 & 0.038 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\sigma & 0 \\ 0 & \cos\sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

在关系式(8)，(9)与(16)中分别取 $\varepsilon=0.5$，$\beta=0.6$，解 Riccati 方程(9)与(16)，可得

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 0.28054 & 0.00871 \\ 0.00871 & 0.12583 \end{pmatrix}, \quad \underline{X} = \begin{pmatrix} 0.2514 & 0.0041 \\ 0.0041 & 0.1093 \end{pmatrix}.$$

将此结果与文献[2]相应结果比较，本文所求之 $\underline{X}$ 大而 $\overline{X}$ 小，因而优于文献[2]结果.

5　结论

本文研究了离散 Lyapunov 方程在参数摄动下的正定解的上、下界估计问题，以期为

基于 Lyapunov 方程的系统分析与控制问题提供必要的理论分析基础. 与文献[2]相比，它允许的参数摄动结构更为一般，且只需解两个代数 Riccati 方程，从而避免了高阶代数矩阵方程的求解. 数值算例说明了本文结果的优越性.

参 考 文 献

1 Curran P F. Lyapunov's matrix equation with system matrix in companion form. *Int. J. Contr.*, **57**(6):1509—1516

2 Xu J H, Skelton R E, Zhu G. Upper and lower covariance bounds for perturbed linear systeims. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1990, **35**(8):944—948

3 Wonham W M. Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. New York: Springer-Verlag, 1979

4 Gohberg I, Lancaster P. Rodman L. On Hermition solutions of the symmetric algebraic Riccati equation. *SIAM J. Contr. Optim.*, 1986, **24**(6):1323—1334

5 Xie Lihua, Soh Y C, De Souza C E. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systims. *IEEE Trans. Automat. contr.*, 1994, **39**(6):1310—1314

王子栋　1966年生. 1986年毕业于苏州大学获数学学士学位，1988年于上海中国纺织大学获应用数学硕士学位，1994年于南京理工大学获自动控制博士学位，同年晋升为副教授. 1996年获德国洪堡博士后研究基金. 近年来在国内外 H_∞ 刊物及国际会议上发表论文80余篇. 目前主要研究兴趣为系统建模、随机控制、容错控制及无穷控制等.

郭　治　1937年生. 1961年毕业于哈尔滨军事工程学院. 现为国务院学位委员会学科评议组成员，中国兵工学会自动控制委员会主任委员，南京理工大学自动化系教授. 目前主要研究兴趣集中于随机控制的建模以及期望性能指标集下的满意控制的工程实现.