第25卷 第1期
1999年1月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 25, No. 1
Jan., 1999

短 文

基于协方差配置的采样估计[1)]

霍沛军 (上海交通大学工业管理系 上海 200052)

王子栋 郭 治 (南京理工大学自动化系 南京 210094)

摘 要 在工程应用中，状态估计的指标要求常常表现为误差协方差的形式. 在充分考虑系统内采样特性的基础上，提出了采样估计协方差的定义和一种新的采样估计方法，目的在于设计离散估计器使采样估计协方差达到指定值，从而获得满意的稳定状态估计性能. 将此采样估计问题等价地转化为一个虚拟离散系统的估计器设计问题，给出了期望估计器的存在条件及显式表示. 数值例子说明了方法的有效性.

关键词 连续系统，随机系统，采样估计，协方差配置，内采样特性.

SAMPLED-DATA ESTIMATION WITH COVARIANCE ASSIGNMENT

HUO Peijun

(*Department of Industrial Management, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200052)

WANG Zidong GUO Zhi

(*Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing* 210094)

Abstract It is quite common in state estimation problems to have performance objectives that are expressed as the error covariance. In this paper, a sampled-data estimation covariance is defined by taking into account the intersample behavior completely. An innovation method of sampled-data estimation is also presented. The purpose of this problem is to design discrete estimators which can assign the sampled-data estimation covariance to a prespecified value such that the steady-state behavior of the state estimation is satisfactory. The sampled-data estimation problem is reduced to estimator design for a fictitious discrete-time system. Both the existence conditions and the explicit expression of the desired estimators are given. An illustrative example is provided to demonstrate the effectiveness of the design procedure.

Key words Continuous-time systems, stochastic systems, sampled-data estimation, covariance assignment, intersample behavior.

1)国家自然科学基金资助项目.

收稿日期 1997-01-10 收到修改稿日期 1998-07-14

1 引言

随着数字计算机的广泛应用,采样估计理论迅速发展起来并大量应用于工程实践中.采样估计是指连续系统的状态由离散估计器来估计,其通常的研究方法是将连续系统离散化,然后对离散后的系统设计离散估计器[1].但这种方法没有考虑到被估计的系统是连续的,从而忽略了系统的内采样特性,不能精确地描述采样估计性能.

本文的主要目的是将已有的误差协方差配置理论[2]推广到采样估计情形,即为连续系统设计离散估计器,从而将采样估计协方差配置到指定值.在文中我们考虑连续系统的测量输出受到白噪声干扰时的采样估计问题.

本文在第2节中基于内采样特性提出了采样估计协方差的定义,然后在第3节中讨论采样估计协方差的配置问题,此问题可划分为两步完成:首先将采样估计协方差等价地表示为采样点估计协方差,然后将采样点估计协方差配置至一个虚拟的离散系统.

2 问题的描述

考虑如下线性时不变连续随机系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + w(t), \quad y(t) = Cx(t) + v(t). \tag{1}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 为状态;$y(t)\in R^m$ 为测量输出;$w(t)$和 $v(t)$为不相关零均值高斯白噪声过程,其强度分别为 $W>0$和 $V>0$.

连续系统的精确离散化是采样估计器设计成功的根本前提.不能对含有噪声的测量直接进行采样,否则经直接采样得到的等价离散测量噪声的协方差无界[3].为此,我们采用平均 A/D 装置[4]$y(k\tau) \triangleq \frac{1}{\tau}\int_{(k-1)\tau}^{k\tau} y(t)\mathrm{d}t$,这里 $\tau > 0$ 是采样周期.于是可得连续系统(1)的当前状态离散模型(the present-state-dependent discrete model)[1]

$$x((k+1)\tau) = A_\tau x(k\tau) + w_\tau(k\tau), \tag{2}$$

$$y(k\tau) = C_\tau x(k\tau) + v_\tau(k\tau). \tag{3}$$

上式中

$$A_\tau \triangleq e^{A\tau},\ C_\tau \triangleq \frac{1}{\tau}C\int_0^\tau e^{A(\xi-\tau)}\mathrm{d}\xi, \quad w_\tau(k\tau) \triangleq \int_0^\tau e^{A(\tau-\xi)}w(k\tau+\xi)\mathrm{d}\xi;$$

$$v_\tau(k\tau) \triangleq \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v((k-1)\tau+\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{1}{\tau}C\int_0^\tau \int_\xi^\tau e^{A(\xi-\eta)}w((k-1)\tau+\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi;$$

$w_\tau(k\tau)$和 $v_\tau(k\tau)$为零均值白噪声序列且

$$\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} w_\tau(k\tau) \\ v_\tau(k\tau)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_\tau^{\mathrm{T}}(k\tau) & v_\tau^{\mathrm{T}}(k\tau)\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} W_\tau & 0 \\ 0 & V_\tau\end{bmatrix} \triangleq W_{\mathrm{d}};$$

这里 $W_\tau \triangleq \int_0^\tau e^{A\xi}We^{A^T\xi}\mathrm{d}\xi, V_\tau \triangleq \frac{1}{\tau}V + \frac{1}{\tau^2}\int_0^\tau F(\xi)WF^{\mathrm{T}}(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad F(\xi) \triangleq C\int_0^\xi e^{A(\eta-\xi)}\mathrm{d}\eta.$

重构系统(1)的状态的离散估计器形为

$$\hat{x}[k+1] = G\hat{x}[k] + Ky(k\tau). \tag{4}$$

定义 $\varepsilon_{\mathrm{d}}[k]\triangleq x(k\tau)-\hat{x}[k]$,则由(2),(3),(4)式易得

$$\varepsilon_d[k+1] = G\varepsilon_d[k] + (A_\tau - G - KC_\tau)x(k\tau) + w_\tau(k\tau) - Kv_\tau(k\tau); \tag{5}$$

并可得由系统(2)和(5)组成的增广系统

$$x_d[k+1] = (A_d + BHM)x_d[k] + (D + BHJ)w_d[k]; \tag{6}$$

其中 $w_d[k]$是具有协方差 $W_d>0$的零均值白噪声过程，且

$$x_d[k] \triangleq \begin{bmatrix} x(k\tau) \\ \varepsilon_d[k] \end{bmatrix}, w_d[k] \triangleq \begin{bmatrix} w_\tau(k\tau) \\ v_\tau(k\tau) \end{bmatrix}, A_d \triangleq \begin{bmatrix} A_\tau & 0 \\ A_\tau & 0 \end{bmatrix}, B \triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix},$$

$$H \triangleq [G \quad K], M \triangleq \begin{bmatrix} I & -I \\ C_\tau & 0 \end{bmatrix}, D \triangleq \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, J \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

假设 $w(t)$和 $v(t)$与其时间前的采样点状态无关，即

$$\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} x(k_1\tau) \\ \varepsilon_d[k_1] \end{bmatrix}\left[w^{\mathrm{T}}(k_2\tau+\xi) \quad v^{\mathrm{T}}(k_2\tau+\xi)\right]\right\} = 0, k_1 \leqslant k_2, 0 \leqslant \xi < \tau,$$

系统(6)中状态 $x_d[k]$表示系统(1)和(5)在采样点的状态，为此，我们给出下面的定义.

定义1. 对于增广系统(6)，定义如下协方差

$$X_d \triangleq \lim_{k\to\infty}\mathrm{E}\{x_d[k]x_d^{\mathrm{T}}[k]\} = \lim_{k\to\infty}\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} x(k\tau) \\ \varepsilon_d[k] \end{bmatrix}\left[x^{\mathrm{T}}(k\tau) \quad \varepsilon_d^{\mathrm{T}}[k]\right]\right\} \triangleq \begin{bmatrix} X_{d1} & X_{d3} \\ X_{d3}^{\mathrm{T}} & X_{d2} \end{bmatrix},$$

则称 X_d 为采样点估计协方差(the sample time estimation covariance).

说明1. 采样点估计协方差是在离散意义上的协方差，它仅考虑了系统在采样点的信息而未考虑采样点之间的信息(内采样特性).

说明2. 若 X_d 存在，则 X_d 满足如下离散 Lyapunov 方程[5]

$$X_d = (A_d + BHM)X_d(A_d + BHM)^{\mathrm{T}} + (D + BHJ)W_d(D + BHJ)^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

说明3. 若方程(7)成立，则由 Lyapunov 稳定性理论易知增广系统(6)稳定，从而系统(5)稳定，进一步可推断离散估计器(4)稳定.

记 $\varepsilon_s(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t)$，其中 $\hat{x}(t) = \hat{x}[k], k\tau \leqslant t < (k+1)\tau$. 下面我们给出采样估计协方差的定义.

定义2. 采样估计协方差(the sampled-data estimation covariance)为

$$X_s \triangleq \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{k\tau}^{(k+1)\tau}\mathrm{E}\{x_s(t)x_s^{\mathrm{T}}(t)\}\mathrm{d}t, x_s(t) \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon_s(t) \end{bmatrix}.$$

说明4. 采样估计协方差的定义充分考虑了系统的内采样特性，因而可以比采样点估计协方差更精确地描述采样估计性能.

至此，本文的主要目的可叙述如下：对于连续系统(1)，寻找可使采样估计协方差配置至指定值 $X_s>0$的离散估计器(4)的集合. 我们称之为采样估计协方差配置问题.

3　主要结果及证明

下面的定理描述了采样估计协方差 X_s 和采样点估计协方差 X_d 之间的数学关系.

定理1. 若采样估计协方差 $X_s>0$存在，则

$$X_s = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau [C_s(u)X_dC_s^{\mathrm{T}}(u) + W_s(u)]\mathrm{d}u, \tag{8}$$

其中　$0 \leqslant u < \tau$，X_d 为采样点估计协方差且

$$C_s(u) \triangleq \begin{bmatrix} e^{Au} & 0 \\ e^{Au}-I & I \end{bmatrix}, W_s(u) \triangleq \begin{bmatrix} W_1(u) & W_1(u) \\ W_1(u) & W_1(u) \end{bmatrix}, W_1(u) \triangleq \int_0^u e^{A\xi} W e^{A^{\mathrm{T}}\xi} \mathrm{d}\xi.$$

证明. 当$0 \leqslant u < \tau$时,可得

$$x_s(k\tau+u) = \begin{bmatrix} x(k\tau+u) \\ \varepsilon_s(k\tau+u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k\tau+u) \\ x(k\tau+u)-\hat{x}[k] \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{Au} & 0 \\ e^{Au}-I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k\tau) \\ \varepsilon_d[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \int_0^u e^{A(u-\xi)} w(k\tau+\xi) \mathrm{d}\xi$$

注意到$w(k\tau+\xi)$和$x_d[k]$不相关,则有

$$\mathrm{E}\{x_s(k\tau+u)x_s^{\mathrm{T}}(k\tau+u)\} = C_s(u)\mathrm{E}\{x_d[k]x_d^{\mathrm{T}}[k]\}C_s^{\mathrm{T}}(u) + W_s(u),$$

因此 $X_s = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^\tau \mathrm{E}\{x_s(k\tau+u)x_s^{\mathrm{T}}(k\tau+u)\}\mathrm{d}u = \dfrac{1}{\tau}\displaystyle\int_0^\tau [C_s(u)X_dC_s^{\mathrm{T}}(u) + W_s(u)]\mathrm{d}u.$

定理1表明,$C_s(u)$和$W_s(u)$不依赖于参数G和K,从而上节所提出的采样估计协方差配置问题可由下面定理解决.

定理2. 指定的$X_s>0$称为可配置的,如果存在矩阵集(G,K)使采样估计协方差的稳态值等于X_s. 此X_s可配置当且仅当存在唯一的正定阵$X_d>0$满足(8)式且存在(G,K)使(7)式成立.

证明. 思路与文献[6]中定理2的证明类似,这里不再赘述.

由定理2,采样估计协方差配置问题可通过以下两个步骤解决:

步骤1. 对于指定的采样估计协方差$X_s>0$,求出满足(8)式的正定阵$X_d>0$;

步骤2. 对于由步骤1求得的$X_d>0$,寻找使(7)式成立的(G,K)的集合.

为了求解步骤1,将(8)式整理为$\int_0^\tau e^{\hat{A}u}X_d e^{\hat{A}_u^{\mathrm{T}}}\mathrm{d}u = \hat{Q}$,其中

$$\hat{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ A & 0 \end{bmatrix}, \hat{Q} \triangleq \tau X_s - \int_0^\tau W_s(u)\mathrm{d}u.$$

然后由文献[6]中提供的算法即可求出X_d.

下面考虑步骤2. 注意到(7)式与文献[5]中(4.3)式形同,从而根据文献[5]中定理6之引理1可求出H,再考虑到$H=[G \quad K]$即可求出期望的估计器. 限于篇幅,这里略去步骤2求解的详细步骤和本文设计方法的示例,必要时请参看文献[7].

4 结论

本文讨论了连续系统的采样估计问题. 文中首先基于内采样特性提出了采样估计协方差的定义,然后研究了采样估计协方差的配置问题,并通过两个步骤使此问题得到了完整解决:在步骤1中,采样估计协方差被转化为采样点估计协方差;步骤2将步骤1求出的采样点估计协方差配置给一个虚拟的离散系统. 本文第3节给出了期望估计器的存在条件及其解的集合.

参 考 文 献

1 Shats S, Shaked U. Exact discrete-time modelling of linear analogue systems. *Int. J. Control*, 1989, **49**(1): 145～160

2 Yaz E, Skelton R E. Continuous and discrete state estimation with error covariance assignment. In: Proc. 30th Conf. on Decision and Control, Brighton, England: IEEE, 1991. 3091－3092

3 Åström K J. Introduction to Stochastic Control Theory. New York: Academic Press, 1970

4 Haddad W M, Bernstein D S, Huang H H, Halevi Y. Fixed-order sampled-data estimation. *Int. J. Control*, 1992, **55**(1):129－139

5 Skelton R E, Iwasaki T. Liapunov and covariance controllers. *Int. J. Control*, 1993, **57**(3):519－536

6 Fujioka H, Hara S. State covariance assignment for sampled-data feedback control systems. *Int. J. Control*, 1995, **61**(3):719－737

7 霍沛军. 基于二阶信息的采样控制与估计[硕士学位论文]. 南京:南京理工大学自动化系,1998. 40－45

霍沛军　1974年3月生. 1995年7月于北方工业大学工业自动化专业获学士学位,1998年3月于南京理工大学自动控制理论及应用专业获硕士学位,1998年2月起为上海交通大学管理学院博士研究生. 目前的研究兴趣为采样控制与估计、经济管理等.

王子栋　1966年生. 1986年毕业于苏州大学获数学学士学位,1988年于上海中国纺织大学获应用数学硕士学位,1994年于南京理工大学获自动控制博士学位,同年晋升为副教授. 1996年获德国洪堡博士后研究基金. 近年来在国内外 H_∞ 刊物及国际会议上发表论文80余篇. 目前主要研究兴趣为系统建模、随机控制、容错控制及无穷控制等.

郭　治　1937年生. 1961年毕业于哈尔滨军事工程学院. 现为国务院学位委员会学科评议组成员,中国兵工学会自动控制委员会主任委员,南京理工大学自动化系教授. 目前主要研究兴趣集中于随机控制的建模以及期望性能指标集下的满意控制的工程实现.