第25卷 第3期
1999年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 25, No. 3
May, 1999

带有分母因式摄动不确定系统的鲁棒镇定[1)]

王恩平
（中国科学院系统科学研究所 北京 100080）

摘 要 讨论了带有分母因式不确定性摄动系统的鲁棒镇定问题，给出了控制器 K 鲁棒镇定摄动系统 G_Δ 的充分必要条件，当标称系统 $G=\tilde{M}^{-1}\tilde{N}\in RL_\infty$ 时，借助于求解次优 Nehari 问题，以状态空间形式给出了摄动系统的鲁棒控制器的参数化公式.

关键词 分母因式摄动，鲁棒镇定，鲁棒控制器.

ROBUST STABILIZATION OF UNCERTAIN SYSTEMS WITH DENOMINATORAL FACTORIAL PERTURBATIONS[1)]

WANG Enping
(*Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Abstract In this paper we study the robust stabilization problem of systems with denominatoral factorial perturbations. And we give a necessary and sufficient condition for the controller K to robustly stabilize the perturbed system G_Δ. At last, the state-space solution of the parameterized formula of the robust controller is obtained through solving the sub-optimal Nehari's problem.

Key words Denominatoral factorial perturbation, robust stabilization, robust controller.

1 引言

在过去的几十年里，带有非结构不确定性的定常线性摄动系统的鲁棒镇定问题受到了人们的广泛注意. 特别是，用 Zames[1]提出来的 H_∞控制方法研究这一问题已经取得了许多有意义的结果. 系统的非结构不确定性是指除了可估计出它的上界之外，再也没有其它可利用的信息了. 一般来说，系统的非结构不确定性主要有三种类型：加性不确定性、乘性不确定性和互质因式不确定性（在系统的互质分解因式中出现的不确定性）. Doyle 和

1）国家攀登计划资助课题.
收稿日期 1997-12-23 收修改稿日期 1998-10-09

Stein 在文[2]以及 Chen 和 Desoer 在文[3]中已经讨论过带有乘性和加性不确定性的鲁棒镇定问题，给出了一个控制器能鲁棒镇定摄动系统的充分必要条件. Glover 和 McFarlane 在文[4]和 Glover 在文[5]中分别研究了带有互质因式不确定性和加性不确定性的鲁棒镇定问题，给出了一个控制器鲁棒镇定摄动系统的充分必要条件、鲁棒控制器的参数化公式以及可允许的最大摄动半径. 本文作者在文[6]中研究了带有分子因式不确定系统的鲁棒镇定问题，给出了与文[4]相一致的结果. 相关的讨论也可在 McFarlane 和 Glover 的文[7]，Habets 的文[8]，Kimura 的文[9]，Vidyasagar 和 Kimura 的文[10]以及 Vidyasagar 的文[11]中找到.

本文讨论一类特殊的带有分母因式摄动不确定性系统的鲁棒镇定问题. 在下文中，我们总是用 RL_∞ 表示在 $j\omega$ 上没有极点的真有理函数矩阵的全体组成的空间，$RH_\infty \subset RL_\infty$ 是一个子空间，它是由在右半平面内解析的真有理函数矩阵的全体组成. 空间 RL_∞ 或 RH_∞ 上的范数为 $\|G\|_\infty = \sup\limits_\omega \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(G^{\mathrm{T}}(-j\omega)G(j\omega))$，$G \in RL_\infty$，其中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵的最大特征值. 若 $G \in RL_\infty$，记 $G^{\sim} = G^{\mathrm{T}}(-s)$. 令 $G(s)$ 或 G 表示一个标称有限维定常线性系统的传递函数矩阵，它的左互质分解为

$$G = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}, \tag{1}$$

其中 $\tilde{M}, \tilde{N} \in RH_\infty$. 研究如图1所示的摄动系统

$$G_\Delta = (\tilde{M} + \Delta_M)^{-1}\tilde{N}, \tag{2}$$

其中 $\Delta_M \in RH_\infty$，$\|\Delta_M\|_\infty < \varepsilon$，$\varepsilon$ 是一个事先给定的正常数. 这是一个带有分母因式不确定性的摄动系统，Δ_M 为摄动模式，ε 为给定的摄动半径. 这类摄动系统有一定的代表性，例如，由传递函数的分母为多项式族描述的单输入单输出系统的鲁棒镇定就可以化成(2)式的形式进行研究.

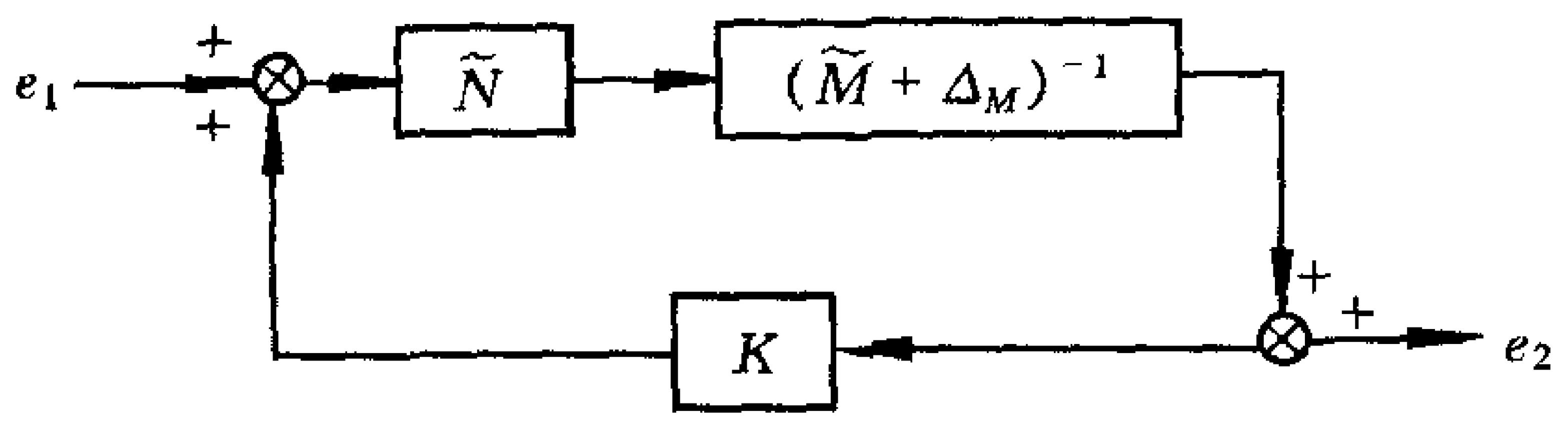

图1　带有分母因式摄动模式的闭环系统

我们的主要问题是：

1）给定标称系统 G，摄动模式 Δ_M 和摄动半径 ε，寻找控制器 K 鲁棒镇定摄动系统 G_Δ 的充分必要条件；

2)借助于求解次优 Nehari 问题，给出 G_Δ 的鲁棒控制器的参数化公式.

2　预备知识

首先介绍一些预备知识.

定义1. 已知标称系统 G 和控制器 K，它们所组成的闭环系统如图1所示（$\Delta_M = 0$），记为 (G, K). 称闭环系统 (G, K) 为内部稳定的充分必要条件为 i) $(I-GK)^{-1}, K(I-GK)^{-1}, (I-GK)^{-1}G, (I-GK)^{-1} \in RH_\infty$; ii) $\det(I-GK)(\infty) \neq 0$.

定义2. 已知标称系统 G、摄动系统 G_Δ、摄动半径 ε 和控制器 K，它们所组成的闭环摄动系统如图1所示. 其鲁棒稳定的充分必要条件是，对一切 $\Delta_M \in RH_\infty$，$\|\Delta_M\|_\infty < \varepsilon$，$(G_\Delta, K)$，都是内部稳定的. 此时称 K 鲁棒镇定摄动系统 G_Δ，或 K 为摄动系统 G_Δ 的鲁棒控制器；使 (G_Δ, K) 保持内部稳定的 ε 的最大值称为鲁棒镇定 G_Δ 可允许的最大摄动半径，记做

$\varepsilon_{\max}$.

定义3. 已知实有理矩阵 G，如果在 RH_∞ 中存在八个矩阵满足下列等式

$$G = NM^{-1} = \widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}, \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X} & -\widetilde{Y} \\ -\widetilde{N} & \widetilde{M} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & Y \\ N & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中 I 为单位矩阵，则称(3)，(4)式为 G 的双互质分解，$\widetilde{M}^{-1}\widetilde{N}$ 和 NM^{-1} 分别为 G 的左、右互质分解.

引理1[12]. 每个实有理矩阵 G 都存在双互质分解. 如果 G 的最小实现为

$$G \triangleq C(sI-A)^{-1}B + D = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right], \tag{5}$$

则有

$$\begin{bmatrix} M & Y \\ N & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F \\ C_F \end{bmatrix}(sI - A_F)^{-1}[B \quad H], \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{M} & -\widetilde{Y} \\ -\widetilde{N} & \widetilde{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ -C \end{bmatrix}(sI - A_H)^{-1}[B_H \quad H], \tag{7}$$

其中 $A_F = A - BF$，$A_H = A - HC$ 都是稳定矩阵，$C_F = C - DF$，$B_H = B - HD$. 并且由(6)和(7)式决定的 $\widetilde{M}$ 与 $\widetilde{N}$ 的左互质性、M 与 N 的右互质性不依赖于矩阵 F 和 H 的选择，只要求 A_F 和 A_H 稳定.

定义4. 假设 P 为分块矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},$$

则称 $F_l(P,K) \triangleq P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$ 为一个下线性分式变换，称 $F_u(P,\Delta) \triangleq P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12}$ 为一个上线性分式变换. 如果 U 为分块矩阵

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix},$$

则称 $\Gamma_U[K] = (U_{11}K + U_{12})(U_{21}K + U_{22})^{-1}$ 为一个链式散射分式变换.

3　鲁棒镇定问题

这里我们将给出控制器 K 鲁棒镇定带有分母因式不确定性的摄动系统的充分必要条件. 按文[7]中的表示，将(2)式写成广义对象的形式

$$P = \begin{bmatrix} -\widetilde{M}^{-1} & G \\ -\widetilde{M}^{-1} & G \end{bmatrix},$$

则由上一节的上线性分式变换可知摄动系统

$$G_\Delta = (\widetilde{M} + \Delta_M)^{-1}\widetilde{N} = F_u(P, \Delta_M).$$

依据文[7]中的定理3.3有如下定理.

定理1. 已知标称系统 G、摄动模式 Δ_M 和摄动半径 $\varepsilon > 0$，则对任意 $\Delta_M \in RH_\infty$，$\|\Delta_M\|_\infty < \varepsilon$，控制器 K 鲁棒镇定摄动系统 G_Δ 的充分必要条件是

1)K 镇定 G,

2)$\|F_l(P,K)\|_\infty \leqslant \varepsilon^{-1}$. (8)

该定理的证明参见文[7].

引理2[12]. 已知标称系统 G,其双互质分解由(3)和(4)式给出,则镇定 G 的控制器集合为

$$K = (Y - MQ)(X - NQ)^{-1} = (\tilde{X} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} - Q\tilde{M}), \tag{9}$$

$$Q \in RH_\infty, \quad \det(X - NQ)(\infty) \neq 0, \quad \det(\tilde{X} - Q\tilde{N})(\infty) \neq 0. \tag{10}$$

定理2. 已知标称系统 G、摄动模式 Δ_M 和摄动半径 $\varepsilon>0$,则对任意 $\Delta_M \in RH_\infty$, $\|\Delta_M\|_\infty < \varepsilon$,控制器 K 鲁棒镇定摄动系统 G_Δ 的充分必要条件是 K 可表示成(9)式,且 $Q \in RH_\infty$, $\det(X-NQ)(\infty) \neq 0$,满足不等式

$$\|X - NQ\|_\infty \leqslant \varepsilon^{-1}. \tag{11}$$

证明. 任取镇定 G 的控制器 K,由引理2知,必存在 $Q \in RH_\infty$, $\det(X-NQ)(\infty) \neq 0$,使得 $K=(Y-MQ)(X-NQ)^{-1}$. 经计算得 $F_l(P,K) = -(X-NQ)$. 因此,由定理1说明该定理是正确的.

4 鲁棒控制器的参数化

现在假设 $G \in RL_\infty$ 为一 $m \times r$ 阶矩阵,$m \geqslant r$. 在这一节将给出鲁棒镇定摄动系统 G_Δ 的所有控制器的参数化公式. 为此,取 G 的最小实现及其双互质分解(5)—(7)式.

定理3. 已知 $G \in RL_\infty$ 为一 $m \times r$ 阶矩阵,$m \geqslant r$,摄动模式 $\Delta_M \in RH_\infty$, $\|\Delta_M\|_\infty < \varepsilon$,则鲁棒镇定系统 G_Δ 的控制器 K 可由下列参数化公式

$$K = \Gamma_U[\Phi], \quad \forall\, \Phi \in RH_\infty, \|\Phi\|_\infty \leqslant \varepsilon^{-1}, \tag{12}$$

$$U = \left[\begin{array}{c|cc} A_F + [B \;\; -H]W_\infty^{-1}L & \multicolumn{2}{c}{[B \;\; -H]W_\infty^{-1}} \\ \hline F + [I \;\;\; 0]W_\infty^{-1}L & \sqrt{1-\varepsilon^2}R^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ -C_F + [D \;\;\; -I]W_\infty^{-1}L & -\dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}DR^{-\frac{1}{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}I \end{array}\right], \tag{13}$$

给出,其中

$$R = D^{\mathrm{T}}D > 0, \tag{14}$$

$$L = J^{-1}W_\infty^{-1}\begin{bmatrix} -(D^{\mathrm{T}}C_F + BP) \\ C_F + H^{\mathrm{T}}P \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$W_\infty^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\varepsilon^2}R^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ -\dfrac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}DR^{-\frac{1}{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}I \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$PA_F + A_F^{\mathrm{T}}P + C_F^{\mathrm{T}}C_F - L^{\mathrm{T}}JL = 0, \tag{17}$$

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\varepsilon^{-2}I \end{bmatrix}. \tag{18}$$

证明. 由定理2可知,控制器 K 鲁棒镇定摄动系统的充要条件是 K 可以表示成(9)式,且 $Q \in RH_\infty$, $\det(X-NQ) \neq 0$满足不等式(11). 因此鲁棒控制器 K 可表示成

$$K = \Gamma_{U_1}[Q],\ \forall\ Q \in RH_\infty,\quad \|X - NQ\|_\infty \leqslant \varepsilon^{-1},\quad U_1 = \begin{bmatrix} -M & X \\ -N & Y \end{bmatrix}. \tag{19}$$

现在主要是求解次优 Nehari 问题(11). 依文[13]中定理2.4和3.2,次优 Nehari 问题(11)的解为

$$Q = Q_1 Q_2^{-1}, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} \Phi \\ I \end{bmatrix},\quad \Phi \in RH_\infty, \|\Phi\|_\infty \leqslant \varepsilon^{-1}, \tag{21}$$

其中

$$W = W_\infty + L(sI - A_F)^{-1}[-B \quad H], \tag{22}$$

L, W_∞ 分别由(15)—(18)式决定. 将(20)和(21)式决定的 Q 代入(19)式,得

$$K = \left([-M \quad Y] W^{-1} \begin{bmatrix} \Phi \\ I \end{bmatrix} \right) \left([-N \quad X] W^{-1} \begin{bmatrix} \Phi \\ I \end{bmatrix} \right)^{-1}. \tag{23}$$

容易计算

$$[-N \quad X] W^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_F + [B \quad -H] W_\infty^{-1} L & [-B \quad H] W_\infty^{-1} \\ \hline C_F + [D \quad 0] W_\infty^{-1} L & [-D \quad 0] W_\infty^{-1} \end{array} \right], \tag{24}$$

$$[-M \quad Y] W^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_F + [B \quad -H] W_\infty^{-1} L & [B \quad -H] W_\infty^{-1} \\ \hline F + [I \quad 0] W_\infty^{-1} L & [I \quad 0] W_\infty^{-1} \end{array} \right], \tag{25}$$

将(24)和(25)式代入(23)式,得

$$K = \Gamma_U[\Phi],\quad \forall\ \Phi \in RH_\infty, \|\Phi\|_\infty \leqslant \varepsilon^{-1}, \tag{26}$$

其中

$$U = \left[\begin{array}{c|c} A_F + [B \quad -H] W_\infty^{-1} L & [B \quad -H] W_\infty^{-1} \\ \hline F + [I \quad 0] W_\infty^{-1} L & [I \quad 0] W_\infty^{-1} \\ -(C_F + [D \quad -I] W_\infty^{-1} L) & [-D \quad I] W_\infty^{-1} \end{array} \right]. \tag{27}$$

经计算

$$\begin{bmatrix} [I \quad 0] W_\infty^{-1} \\ [-D \quad I] W_\infty^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\varepsilon^2} R^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} D R^{-\frac{1}{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} I \end{bmatrix}. \tag{28}$$

由(26)—(28)式便给出了(12)和(13)式　　证毕.

注. 在定理3中我们假定了 $\varepsilon < 1$,对 $\varepsilon = 1$,按照定理证明的方法只有当 D 为可逆方阵时,问题才有解,这是方法本身的局限性. 当 $\varepsilon > 1$时可类似求解.

5　结束语

本文讨论了带有分母因式摄动不确定性系统的鲁棒镇定问题,给出了一个控制器 K 鲁棒镇定摄动系统 G_Δ 的充分必要条件,当标称系统 $G \in RL_\infty$ 为 $m \times r$ 阶矩阵,$m \geqslant r$,且列满秩时给出了鲁棒控制器集合的参数化公式. 本文所遗留的问题是寻求最大允许的摄动半径 ε_{max}. 这需要求解一个 Nehari 问题

$$\min_{Q \in RH_\infty} \|X - NQ\|_\infty = \varepsilon_{\max}^{-1}.$$

参 考 文 献

1 Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplici-tive semiorms and approximate inverses. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1981, **AC-26**(2):301－320

2 Doyle J, Stein G. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1981, **AC-26**, (1):4—16

3 Chen M, Desoer C. Necessary and sufficient condition for robust stability of linear distributed feedback systems. *Int. J. Control*, 1982, **35**(2):255—267

4 Glover K, McFarlane D C. Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with H_∞-bounded uncertainty, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, **AC-34**(8):821—830

5 Glover K. Robust stabilization of linear multivariable systems: Relations to approximation. *Int. J. Control*, 1986, **43**(3):741—766

6 Wang, E. P. Robust stabilization of system with numeratoral factorial uncertainty. *J. Syst. Sci. & Math. Sci.*, 1998, **11**(2):184—192

7 McFarlane D C, Glover K. Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions, Lecture Notes in Control and Information Sciences. 138, New York: Springer-Verlag, 1989

8 Habets L. Robust Stabilization in the Gap-Topology, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 150, Germany: Springer-Verlag, 1991

9 Kimura H. Robust stabilization for a class transfer functions. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1984, **AC-29**(6): 788 － 793

10 Vidyasagar M, Kimura H. Robust controllers for uncertain linear multivariable systems. *Automatica*, 1986, **22**(1): 85—94

11 Vidyasagar M. Control System Synthesis: A Coprime Factorization Approach. Cambridge, MA: M. I. T. Press, 1985

12 Francis B A. A Course in H_∞ Control Theory. New York: Springer-Verlag, 1987

13 Green M, Glover K, Limebeer D, Doyle J. A J-spectral factorization approach to H_∞ control. *SIAM J. Control and Optimization*, 1990, **28**(6):1350—1371

王恩平 简介见本刊第21卷第6期.