第25卷 第2期
1999年3月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 25, No. 2
Mar., 1999

短 文

关键路径与随机串行生产线的灵敏度分析

刘自宽 涂著生
（南开大学计算机与系统科学系 天津 300071）

摘 要 扰动分析是研究离散事件动态系统的有效方法，性能函数的可微性是应用该方法的前提条件之一. 利用关键路径的概念，证明了随机串行生产线稳态性能函数可微的充要条件为系统的关键路径以概率1唯一；而且，当系统的关键路径以正概率不唯一时性能函数的方向导数存在，进而给出了其方向导数的无偏估计量. 最后指出应用扰动分析和非光滑分析方法研究这类性能函数不可微系统的思路.

关键词 随机串行生产线，关键路径，不可微性.

CRITICAL PATH AND SENSITIVITY ANALYSIS OF STOCHASTIC SERIAL PRODUCTION LINES

LIU Zikuan TU Bengsheng
(*Department of Computer & System Sciences, Nankai University, Tianjin* 300071)

Abstract Perturbation analysis is an efficient method to study DEDS, which requires the differentiability of the performance function. In this paper, by using the notion of critical path, it is first proved that the steady-state performance function of a stochastic serial production line is differentieble iff its critical path is unque w. p. 1. Moreover, it is shown that in the case of the critical path being not unque with postive probability, the one-sided derivatives of the performance function exist and their unbaised estimators are given. Finally, the method of parameters optimization of DEDS via perturbation analysis and nonsmooth optimization is outlined.

Key words Stochastic serial production line, critical path, nondifferentiability.

1 引言

众所周知，数学期望值表示的离散事件动态系统(DEDS)的稳态性能函数通常没有

1) 国家自然科学基金(69674013)和国家攀登计划资助项目.
收稿日期 1997-06-18 收修改稿日期 1997-10-09

明显解析式，因而常用仿真方法来估计它. 近年来出现的基于单样本轨道的灵敏度分析方法，如扰动分析(IPA)、似然比(LR)等都是提高仿真效率的有效方法. 其中扰动分析方法最为突出，该方法在理论和应用方面都取得了丰硕成果[1]. 其要点是用样本性能函数梯度来估计系统性能函数的梯度，然后用随机梯度算法优化系统参数.

在一定条件下，IPA 方法是很有效的. 然而，性能函数的梯度并不总是存在的，Y. Wardi 等人在文献[2]中猜想 DEDS 的性能函数可能在一个稠密集上是不可微的，文献[3]中构造了一个循环排队网的例子，其性能函数在有理点处都不可微，从而证实了文献[2]中的猜想. 文献[4]在样本轨道为凸函数的情况下，证明了文献[2]中的猜想. 本文利用关键路径的概念，给出了随机串行生产线稳态性能函数可微的判别条件，并构造出稳态性能函数方向导数的无偏估计量.

2　主要结果

考虑如下串行生产线

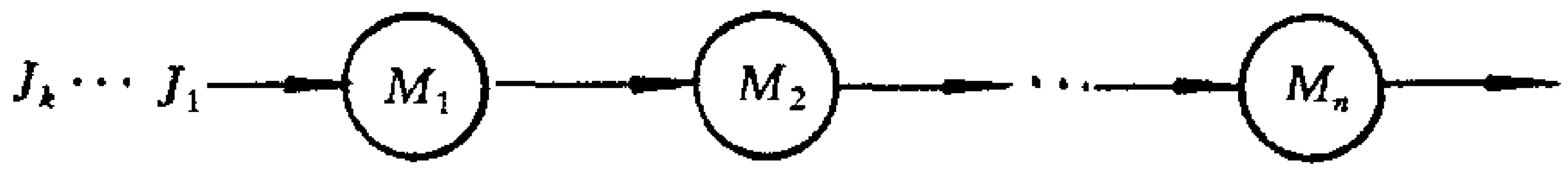

图1

其中机器 $M_i, i \in \underline{n} = \{1, 2, \cdots, n\}$ 是柔性连接的，即机器间的存储容量无穷大. 设 $p_i(k, \theta_i)$ 表示工件 J_k 在机器 M_i 上的加工时间，其中 θ_i 表示控制参数，$x_i(k)$ 为工件 J_k 离开机器 M_i 的时间；y_k 表示工件 J_k 离开系统的时间；$\boldsymbol{X}(K) = (x_1(k), \cdots, x_n(k))^{\mathrm{T}}$ 表示状态向量，那么在极大代数意义下该制造系统有状态方程[5]

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(k+1) = A(k+1) \otimes \boldsymbol{X}(k), \\ y_k = C \otimes \boldsymbol{X}(k), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\varepsilon = -\infty, e = 0, a \oplus b = \max(a, b), a \otimes b = a + b, C = (\varepsilon, \cdots, \varepsilon, e), A(k) = (p_{ij}(k)), i, j \in \underline{n}$，当 $j > i$ 时，$p_{ij}(k) = \varepsilon$；当 $j < i$ 时，$p_{ij}(k) = p_j(k) \otimes \cdots \otimes p_i(k)$；$p_{ii}(k) = p_i(k)$. 以下在不致引起混淆的情况下省略$\otimes$.

记工件 i 的加工时间为 $\boldsymbol{P}(i, \boldsymbol{\theta}) = (p_1(i, \theta_1), \cdots, p_n(i, \theta_n)), \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$. 不失一般性作如下假设：$\boldsymbol{P}(i, \boldsymbol{\theta})), i \geqslant 1$独立同分布，具有联合分布函数 $\Pi_{k=1}^{n} F_k(\theta_k, t_k)$，其中 $F_k(\theta_k, t_k)$是 $p_k(i, \theta_k)$的分布函数，那么可记

$$\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^T, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\theta}, \xi') = (g_1(\theta_1, \xi_1), \cdots, g_n(\theta_n, \xi_n)),$$

其中 $g_i(\theta_i, \xi_i) = F_i^{-1}(\theta_i, \xi_i), \xi_i$ 服从[0,1]上的均匀分布. 考虑加工 N(足够大)个工件的情况，工件 J_i 在 n 台机器上的加工时间可表为

$$\boldsymbol{P}^i(\boldsymbol{\theta}, \xi) = (\boldsymbol{g}_l(\boldsymbol{\theta}_1, \xi_{i1}), \cdots, g_n(\theta_n, \xi_{in})). \tag{2}$$

记 $\boldsymbol{\xi}^i = (\xi_{i1}, \cdots, \xi_{in}), \xi = \{\boldsymbol{\xi}^i, 1 \leqslant i \leqslant N\}$那么每个 ξ 即为系统的一个样本点.

如果一族随机变量 $G(t, \xi), t \in R$ 满足下列条件，则称其满足假设1.

假设1. 以概率1$G(t, \xi)$关于 t 可微，存在正值随机变量 K_G 满足 $E[K_G] < \infty$且

$$|G(t + \Delta t, \xi) - G(t, \xi)| \leqslant K_G |\Delta t|, \mathrm{w.p.}\ 1. \tag{3}$$

引理1. 设 $L_i(x), x \in R, i \in \underline{m}$是 m 个可微函数，记

$$E=\{x:\exists A\subset \underline{m},|A|\geqslant 2,\text{s.t}.\max_{1\leqslant i\leqslant m}L_i(x)=L_j(x),j\in A\},$$

其中$|A|$表示 A 中元素的个数. 那么 1) 若 $x\notin E$, $\max_{1\leqslant i\leqslant m}L_i(x)$在 x 处可微；2)若 $x\in E$, $\max_{1\leqslant i\leqslant m}L_i(x)$在 x 处存在单侧导数,且

$$\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}x}\max_{1\leqslant i\leqslant m}L_i(x)=\max_{s\in A}L'_s(x),\frac{\mathrm{d}^-}{\mathrm{d}x}\max_{1\leqslant i\leqslant m}L_i(x)=\min_{s\in A}L'_s(x).$$

引理2. 若 $L_i(x,\xi),i\in\underline{m}$满足假设1，那么

$$\frac{\mathrm{d}^\pm}{\mathrm{d}x}E_\xi[\max_{1\leqslant i\leqslant m}L_i(x,\xi)]=E_\xi\left[\frac{\mathrm{d}^\pm}{\mathrm{d}x}\max_{1\leqslant i\leqslant m}L_i(x,\xi)\right].$$

证明. 由引理1和文献[4]中 Prop. 2.1可直接得证引理2.

对式(1)所表示的随机串行生产线,定义其性能函数为 $J_N(\boldsymbol{\theta})=E_\xi[y_N(\boldsymbol{\theta},\xi)/N]$. 称 $1/J_N(\boldsymbol{\theta})$为该生产线的生产率. 假设共加工 N 个工件，那么对一个给定的样本点 ξ, $p_i(j),i\in\underline{n},j\in\underline{N}$ 是确定的. 称工件 J_j 在机器 M_i 上加工为一个事件，记作 O_{ij}. 设 $m(O_{ij})$表示事件 O_{ij}的加工时间, $x_i(j)$是 O_{ij}的结束时间. 显然, $p_i(j)=m(O_{ij})$. 事件 O_{ij-1}, O_{i-1j}叫做 O_{ij}的前相连接事件，记作 $O_{ij-1}<O_{ij}$、$O_{i-1j}<O_{ij}$. 当 $i'\geqslant i,j'\geqslant j,l=i'+j'-(i+j)+1\geqslant 1$时，记$(i',j')\geqslant(i,j)$. 如果事件串 $\omega=O_1O_2\cdots O_l$ 满足条件: $O_1=O_{ij},O_l=O_{i'j'}$, $O_{k-1}<O_k$,那么称 ω 为从 O_{ij}到 $O_{i'j'}$的一条路径. 记 $m(\omega)=m(O_l)\cdots m(O_l)$. 如果 $x_{i'}(j')=m(\omega)m(O_1)^{-1}x_i(j)$，则称 ω 为从 O_{ij}到 $O_{i'j'}$一关键路径[5,6]，记作 $\omega^*(i,j;i',j')$. 令 $\Omega(i,j;i'j')$表示从事件 O_{ij}到事件 $O_{i'j'}$的全体路径. 由式(1)可得 $x_i(k)=p_i(k)(x_{i-1}(k)\oplus x_i(k-1))$. 若 $x_{i-1}(k)=x_i(k-1)$，也就是说事件 O_{ik}的两个前相连接事件同时结束，则称在事件 O_{ik}前机器处于临界状态.

定理1. 设加工时间 $p_i(j,\theta_i)$满足假设1，那么 $J_N(\boldsymbol{\theta})$的方向导数存在，且

$$\frac{\mathrm{d}^\pm J_N(\boldsymbol{\theta})}{\mathrm{d}\theta_i}=\frac{\mathrm{d}^\pm}{\mathrm{d}\theta_i}\left[E_\xi\frac{y_N(\boldsymbol{\theta},\xi)}{N}\right]=E_\xi\left[\frac{\mathrm{d}^\pm y_N(\boldsymbol{\theta},\xi)}{N\mathrm{d}\theta_i}\right].$$

证明. 对任一样本点 ξ，令 $\Omega_\xi(1,1;n,N)$表示从 O_{11}到 O_{nN}的路径的全体，记 $r(\xi)=|\Omega_\xi(1,1;n,N)|$,不妨设 $\Omega_\xi(1,1;n,N)=\{\omega_1,\cdots,\omega_{r(\xi)}\}$, $c(\xi)$表示 $\Omega_\xi(1,1;n,N)$中关键路径的数目. 由文献[5]命题4.1可得 $y_N(\boldsymbol{\theta},\xi)=\max_{1\leqslant s\leqslant r(\xi)}\{m(\omega_s)\}$. 因为 $m(\omega_i)$是有限个满足假设1的可微函数之和,故也满足假设1,因此由引理2可得证定理1.

定义1. 如果一个离散事件动态系统的关键路径以概率1唯一，则称该系统随机相似.

推论1. 若式(1)描述的随机串行生产线是随机相似的，且加工时间满足假设1,那么 $J_N(\boldsymbol{\theta})$可微,且 $\mathrm{d}J_N(\boldsymbol{\theta})/\mathrm{d}\theta_i=E_\xi[\mathrm{d}y_N(\boldsymbol{\theta},\xi)/N\mathrm{d}\theta_i]$.

推论2. 如果加工时间 $p_i(j)$都是连续型随机变量且满足假设1，那么该生产线是随机相似的.

由定理1可以看出当系统以正概率关键路径不唯一时，$J_N(\boldsymbol{\theta})$的方向导数存在. 对一个给定的样本 ξ，可以从关键路径族中找出一条关键路径，称之为右(左)关键路径,其中事件加工时间之和关于 θ_i 的导数是 $y_N(\boldsymbol{\theta},\xi)$关于 θ_i 的右(左)导数，进而是 $\mathrm{d}^+J_N(\boldsymbol{\theta})/\mathrm{d}\theta_i$($\mathrm{d}^-J_N(\boldsymbol{\theta})/\mathrm{d}\theta_i$)的无偏估计量. 下面对于一个给定的样本点 ξ，给出寻找右(左)关键路径的方法. 为了找出右(左)关键路径，将式(1)改写成下列递推关系式

$$\begin{cases}x_1(k+1)=p_1(k+1)x_1(k),\\x_i(k+1)=p_i(k+1)(x_{i-1}(k+1)\oplus x_i(k)).\end{cases}\tag{4}$$

设 $\omega_{ij}^{+}(\omega_{ij}^{-})$分别表示从 O_{11}到 O_{ij}的右(左)关键路径，显然 $\omega_{11}^{+}=O_{11}$，假设已经仿真到第 k 步，$x_i(k)$，ω_{ik}^{+}，$i\in \underline{n}$ 已经得到. 下面进行第 $k+1$步，由(4)第一式可得 $\omega_{1k+1}^{+}=\omega_{1k}^{+}O_{1k+1}$. 进一步假设 $x_t(k+1)$，ω_{tk+1}^{+}，$t\in \underline{j-1}$已经得到，那么由(4)第二式可得

a)若 $x_j(k)=x_{j-1}(k+1)$，

$$\omega_{jk+1}^{+}=\begin{cases}\omega_{jk}^{+}O_{jk+1}, \text{如果 } x_j(k)>x_{j-1}(k+1), \\ \omega_{j-1k+1}^{+}O_{jk+1}, \text{如果 } x_j(k)<x_{j-1}(k+1).\end{cases} \tag{5}$$

b)若 $x_j(k)=x_{j-1}(k+1)$，

$$\omega_{jk+1}^{+}=\begin{cases}\omega_{jk}^{+}O_{jk+1}, \text{如果 } \mathrm{d}m(\omega_{jk}^{+})/\mathrm{d}\theta_i>\mathrm{d}m(\omega_{j-1k+1}^{+})/\mathrm{d}\theta_i, \\ \omega_{j-1k+1}^{+}O_{jk+1}, \text{如果 } \mathrm{d}m(\omega_{jk}^{+})/\mathrm{d}\theta_i\leqslant \mathrm{d}m(\omega_{j-1k+1}^{+})/\mathrm{d}\theta_i.\end{cases} \tag{6}$$

归纳地进行下去，可以得到 ω_{nN}^{+}，ω_{nN}^{-}可完全类似地得到. 由 ω_{nN}^{+}，ω_{nN}^{-}的构造过程可以得到定理2.

定理2. 在定理1的条件下有

1)若 $c(\xi)=1$，那么 $y_N(\boldsymbol{\theta},\xi)$关于 θ_i 可微，且 $\mathrm{d}y_N(\boldsymbol{\theta},\xi)/\mathrm{d}\theta_i=\mathrm{d}m(\omega_{nN})/\mathrm{d}\theta_i$；

2)若 $c(\xi)=1$，w. p. 1，$\mathrm{d}J_N(\boldsymbol{\theta})/\mathrm{d}\theta_i=E_\xi[\mathrm{d}m(\omega_{nN})/(N\mathrm{d}\theta_i)]$；

3)如果 $P(c(\xi)>1)>0$，那么

$$\frac{\mathrm{d}^{\pm}y_N(\boldsymbol{\theta},\xi)}{N\mathrm{d}\theta_i}=\frac{\mathrm{d}m(\omega_{nN}^{\pm})}{N\mathrm{d}\theta_i},\frac{\mathrm{d}^{\pm}J_N(\boldsymbol{\theta})}{\mathrm{d}\theta_i}=E_\xi\frac{\mathrm{d}m(\omega_{nN}^{\pm})}{N\mathrm{d}\theta_i}.$$

3　结论

本文利用关键路径与系统随机相似的概念，证明了随机串行生产线稳态性能函数可微的判别条件为关键路径以概率1唯一，并给出了其方向导数的无偏估计量. 揭示了 DEDS 稳态性能函数不可微的内在原因. 从本文分析结果来看用关键路径的概念来研究 DEDS 性能函数的可微性以及 IPA 估计量的无偏性很直观、有效.

当以正概率系统的关键路径不唯一时，系统的性能函数不可微. 在此情况下可以用关键路径的梯度来估计系统性能函数最速下降方向，进而用非光滑优化算法进行参数优化设计.

参　考　文　献

1　Ho Y C, Cao X R. Perturbation Analysis of DEDS, Norwell MA Kluwer 1991

2　Wardi Y, Mckinnon M W, Shuckle R. On perturbation analysis of queueing networks with finitely supported service time distributions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1991, **36**(7):863—867

3　Cao X R, Gong W B, Wardi Y. Ⅲ-Conditioned performance functons of queueing systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1995, **40**(6):1074—1079

4　Shaprio A, Wardi Y. Nondifferentiability of steady state function in discrete event dynamic systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1994,**39**(8): 1707—1711

5　涂菶生,孙永华. 极大代数上随机线性系统和 DEDS 的扰动分析. 自动化学报, 1992, **18**(6):716—719

6　涂菶生. 离散事件动态系统的关键路径与扰动分析. 系统科学与数学, 1996,**16**(4):318—325

刘自宽 男，1967年11月生. 1998年7月获南开大学计算机与系统科学系博士学位. 在国内外刊物上发表近20篇论文. 现研究兴趣为制造系统中建模与控制. DEDS 与 HDS 的理论及其应用.

涂蓁生 男，1937年5月生. 南开大学计算机与系统科学系教授，博士生导师. 现从事 CIMS，DEDS 理论及其在制造系统、通信理论中应用.

中国自动化学会系统仿真专业委员会
关于99′工业自动化中仿真技术及其应用学术会议征文通知

中国自动化学会系统仿真专业委员会拟于1999年第三季度召开“工业自动化中仿真技术及其应用”的学术会议，地点是安徽省黄山市，欢迎专业委员会委员和广大科技工作者踊跃投稿并参加学术会议. 论文录取后即编入由“中国科技大学出版社”正式出版的论文集，并在会后推荐一批论文在《自动化学报》、《系统仿真学报》或《中国科技大学学报》上发表专刊.

一、征文范围

所有涉及系统仿真技术和应用的动向、研究、开发和生产成果的学术总结：

1 21世纪系统仿真技术展望、国内外仿真系统和软件发展方向

2 连续过程建模与仿真

3 建模和仿真方法、DEDS 仿真技术、定性仿真技术

4 各类控制系统的仿真、各类仿真器、仿真系统应用经验

5 其它

二、征文要求

1. 理论联系实际，内容具体，未在国内外公开发行的刊物或全国性学术会议上发表或宣读过.

2. 凡投寄来的稿件，按如下要求：

• 用 B5纸打印，版芯尺寸：即纸面排文字、图表、页码部分大小，高147mm×220mm，按5号宋体字排，每页39行，每行40字(包括标点符号).

• 文字、图的打印要求：标题排在篇首，用3号黑体字居中排，作者姓名、单位，排在标题下面，姓名用小4号楷体，单位用6号宋体；论文正文全用5号宋体；分节标题用小4号黑体，居中排. 图和表格：随文排入，但都要在版芯尺寸内，复印的图纸要清晰、反差大、无底灰，必须标有图名和表名. 希望论文不超过4页.

3. 论文请打印一份激光清稿寄来，并希望用 Word 97或 WPS 排版后录入3″软盘寄来，或用 ARJ 压缩后通过 E-mail 传至 chenzh@ustc. edu. cn

但文中的图表必须用激光输出并寄至会务组.

4. 来稿请注明详细地址及联系电话等.

三、重要时间：

论文截止日期：1999年5月31日 录用及会议通知：1999年6月30日前发出

会议时间：1999年8月中下旬

四、联系地址：

地址：230027 安徽省合肥市 中国科学技术大学自动化系

联系人：戴耀华

电话：0551-3601514 0551-3601508 传真：0551-3603244

E-mail：chenzh@ustc. edu. cn