



不确定状态滞后系统时滞相关鲁棒 H_∞ 控制¹⁾

曹永岩 孙优贤

(浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027)

摘 要 研究了不确定状态滞后系统的鲁棒 H_∞ 控制问题, 假定参数不确定性时变未知但有界. 基于 LMI 方法, 提出了一种新的鲁棒无记忆状态反馈 H_∞ 控制器的设计方法, 得出的结论与时滞大小有关, 相对于时滞无关的结论具有较少的保守性.

关键词 不确定线性系统, H_∞ 控制, 时滞, 鲁棒控制, 线性矩阵不等式(LMI).

DELAY-DEPENDENT ROBUST H_∞ CONTROL FOR UNCERTAIN STATE DELAYED SYSTEMS

CAO Yongyan SUN Youxian

(Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract This paper deals with the robust H_∞ control problem for uncertain state delayed systems. The parameter uncertainties are time-varying and unknown but norm-bounded. Based on the LMI approach, a new method for designing a robust memoryless state feedback H_∞ control law is proposed to stabilize this class of uncertain time-delay systems and to reduce the effect of the disturbance input on the controlled output to a prescribed level for all admissible uncertainties. The results depend on the size of the delays and may be less conservative.

Key words Uncertain linear systems, H_∞ control, time-delay, robust control, linear matrix inequality.

1 引言

近年来时滞系统的鲁棒控制及鲁棒 H_∞ 控制得到了广泛的研究, 然而大部分结论都是时滞无关的(或称独立时滞)(delay-independent)^[5,6]. 众所周知, 实际系统中的时滞一

1)国家自然科学基金(69604007, 69635010)、中国博士后基金、浙江大学曹光彪高科技发展基金资助项目.

一般都是有界的,无穷时滞在实际系统中一般不会出现.这种时滞无关的鲁棒控制结果都是比较保守的,而且很多情况下无法设计出合适的时滞无关的鲁棒控制律^[3].本文基于 Lyapunov 泛函方法,在通常的 Lyapunov 函数的基础上增加一合适的二次双积分项,给出了一种参数不确定状态滞后系统的与时滞相关的(delay-dependent)鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法.

2 问题描述

考虑如下多状态滞后系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = [A + \Delta A(t)]\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^l [A_i + \Delta A_i(t)]\mathbf{x}(t - \tau_i) + B_w \mathbf{w}(t) + [B + \Delta B(t)]\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{z}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{x}(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^n$ 表示系统的状态向量, $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}^m$ 表示系统的输入向量, $\mathbf{w}(t) \in \mathcal{R}^p$ 表示系统的干扰输入向量, $A, A_i, (i=1, \dots, l), B_w, B, C, D$ 为合适维数的已知常矩阵, $\Delta A(t), \Delta B(t), \Delta A_i(t)$ 为实值连续矩阵函数,表示系统矩阵 $A, B, A_i, (i=1, \dots, l)$ 中的时变参数不确定性, τ_i 表示系统中的常数滞后,并且满足

$$0 < \tau_i \leq \tau, i = 1, \dots, l.$$

为描述非滞后项的方便,本文记 $\tau_0 = 0$. $\phi(t)$ 是一实值连续初始向量函数.本文假定不确定性可以描述为

$$[\Delta A(t) \ \Delta B(t)] = D_0 F_0(t) [E_a \ E_b], \Delta A_i(t) = D_i F_d(t) E_i, i = 1, \dots, l, \quad (2)$$

式中 $D_0, E_a, E_b, D_i, E_i, i=1, \dots, l$, 是合适维数的已知常实矩阵, $F_0(t) \in \mathcal{R}^{k_0 \times j_0}, F_d(t) \in \mathcal{R}^{k_d \times j_d}$ 表示未知的实值时变矩阵,其元素 Lebesgue 可测且有界,且

$$F_0^\top(t) F_0(t) \leq I, \quad F_d^\top(t) F_d(t) \leq I, \forall t. \quad (3)$$

式中 I 表示合适维数的单位矩阵.为简单起见,记

$$\tilde{A}(t) = A + \Delta A(t), \quad \tilde{B}(t) = B + \Delta B(t), \quad \tilde{A}_i(t) = A_i + \Delta A_i(t), \quad i = 1, \dots, l.$$

本文考虑设计无记忆状态反馈控制律

$$\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t), \quad K \in \mathcal{R}^{m \times n}, \quad (4)$$

使得如下闭环系统渐近稳定

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=0}^l \tilde{A}_i \mathbf{x}(t - \tau_i) + B_w \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{z}(t) = (C + DK)\mathbf{x}(t), \quad (5)$$

其中

$$\tilde{A}_0 = A_0 + \Delta A_0(t), \quad A_0 = A + BK, \quad \Delta A_0(t) = D_0 F_0(t) E_0, \quad E_0 = E_a + E_b K,$$

且对于式(3)所示的所有不确定性,其传递函数满足给定的 H_∞ -性能指标 γ ,即 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$.

定义1. 称不确定时滞系统(1)鲁棒稳定,如果对于所有可能不确定性 $F_0(t), F_d(t), \mathbf{u}(t) \equiv 0$ 时泛函微分方程(1)的平凡解 $\mathbf{x}(t) = 0$ 全局一致渐近稳定.称不确定时滞系统(1)鲁棒可镇定,如果对于所有可能不确定性 $F_0(t), F_d(t)$,存在状态反馈控制律 $\mathbf{u}(t) = K\mathbf{x}(t)$ 使得闭环系统(5)鲁棒稳定.

定义2. 给定正实常数 $\gamma > 0$, 称不确定时滞系统(1)鲁棒稳定且具有 H_∞ 性能界 γ , 如果系统(1)鲁棒稳定且在零初始条件下, 对于任意非零 $w(t) \in L_2[0, \infty)$ 和所有允许不确定性 $F_0(t), F_d(t)$ 均使得

$$\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2.$$

称不确定时滞系统(1)可鲁棒 H_∞ 控制, 如果对于所有可能不确定性 $F_0(t), F_d(t)$, 存在控制律 $u(t) = Kx(t)$ 使得闭环系统(4)鲁棒稳定并且其传递函数满足给定的 H_∞ -性能指标 γ .

引理1^[4]. 对于任意向量 $z, y \in \mathcal{R}^n$ 以及任意正定矩阵 $X \in \mathcal{R}^{n \times n}$, 一定有

$$2z^T y \leq z^T X^{-1} z + y^T X y.$$

引理2^[4]. 给定合适维数的实矩阵 A, D, E, F , 假定 $\|F\| \leq 1$, 一定有

a) 对于任意标量 $\epsilon > 0, DFE + E^T F^T D^T \leq \epsilon^{-1} DD^T + \epsilon E^T E$;

b) 对于任意矩阵 $P > 0$, 一定存在标量 $\epsilon > 0$ 使得 $\epsilon I - EPE^T > 0$,

$$(A + DFE)P(A + DFE)^T \leq APA^T + APE^T(\epsilon I - EPE^T)^{-1}EPA^T + \epsilon DD^T;$$

c) 对于任意矩阵 $P > 0$, 一定存在标量 $\epsilon > 0$ 使得 $P - \epsilon DD^T > 0$,

$$(A + DFE)^T P^{-1} (A + DFE) \leq A^T (P - \epsilon DD^T)^{-1} A + \epsilon^{-1} EE^T.$$

3 主要结论

定理1. 给定不确定状态滞后系统(1), 对于任意常数时滞 τ_i , 如果存在对称正定矩阵 X, Y, P_{ij} , 及正常数 $\xi_{ij} > 0, \epsilon_i > 0, \alpha_j > 0, i = 1, 2, \dots, l; j = 0, \dots, l$, 满足如下 LMI:

$$S = \begin{bmatrix} S_0 & H \\ H^T & -J \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

其中 $W_i = \sum_{j=0}^l P_{ij}, \tilde{A} = A + \sum_{i=1}^l A_i$,

$$H = [H_1 \ H_2 \ H_3 \ H_4], \quad J = \text{diag}(J_1 \ J_2 \ J_3 \ J_4),$$

$$S_0 = \tilde{A}X + X\tilde{A}^T + BY + Y^T B^T + \alpha_0 D_0 D_0^T + \sum_{i=1}^l (\alpha_i + \tau_i \epsilon_i) D_i D_i^T + \sum_{i=1}^l \tau_i A_i W_i A_i^T,$$

$$H_1 = [XE_a^T + Y^T E_b^T \quad XE_1^T \quad \dots \quad XE_l^T], \quad J_1 = \text{diag}(\alpha_0 I, \alpha_1 I, \dots, \alpha_l I),$$

$$H_2 = [\tau_1 A_1 W_1 E_1^T \quad \tau_2 A_2 W_2 E_2^T \quad \dots \quad \tau_l A_l W_l E_l^T],$$

$$J_2 = \text{diag}[\tau_1(\epsilon_1 I - E_1 W_1 E_1^T), \tau_2(\epsilon_2 I - E_2 W_2 E_2^T), \dots, \tau_l(\epsilon_l I - E_l W_l E_l^T)],$$

$$\bar{H}_i = [XA^T + Y^T B^T \quad XA_i^T \quad \dots \quad XA_i^T],$$

$$\bar{J}_i = \text{diag}(P_{i0} - \xi_{i0} D_0 D_0^T, P_{i1} - \xi_{i1} D_1 D_1^T, \dots, P_{il} - \xi_{il} D_l D_l^T),$$

$$H_3 = [\tau_1 \bar{H}_1 \quad \tau_2 \bar{H}_2 \quad \dots \quad \tau_l \bar{H}_l], \quad J_3 = \text{diag}(\tau_1 \bar{J}_1, \tau_2 \bar{J}_2, \dots, \tau_l \bar{J}_l),$$

$$\hat{H}_i = [XE_a^T + Y^T E_b^T \quad XE_1^T \quad \dots \quad XE_l^T], \quad \hat{J}_i = \text{diag}(\xi_{i0} I, \xi_{i1} I, \dots, \xi_{il} I),$$

$$H_4 = [\tau_1 \hat{H}_1 \quad \tau_2 \hat{H}_2 \quad \dots \quad \tau_l \hat{H}_l], \quad J_4 = \text{diag}(\tau_1 \hat{J}_1, \tau_2 \hat{J}_2, \dots, \tau_l \hat{J}_l), \quad (7)$$

则该系统可通过无记忆状态反馈控制律 $u(t) = YX^{-1}x(t)$ 鲁棒镇定.

证明. 设 $x(t), t \geq 0$ 是系统(5)在初始时间为零, 初始状态为 $\phi(t)$ 时的解. 由假设可知 $t \geq 0$ 时, $x(t)$ 连续可微, 因此对于 $t \geq \tau_i$ 有^[1]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t - \tau_i) &= \mathbf{x}(t) - \int_{-\tau_i}^0 \dot{\mathbf{x}}(t + \theta) d\theta = \\ &= \mathbf{x}(t) - \int_{-\tau_i}^0 \left\{ \sum_{j=0}^l \tilde{A}_j(t + \theta) \mathbf{x}(t - \tau_j + \theta) \right\} d\theta. \end{aligned}$$

这样系统(5)等价于

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=0}^l \tilde{A}_i(t) \mathbf{x}(t) - \sum_{i=1}^l \int_{-\tau_i}^0 \tilde{A}(t) \left\{ \sum_{j=0}^l \tilde{A}_j(t + \theta) \mathbf{x}(t - \tau_j + \theta) \right\} d\theta, \\ \mathbf{x}(t) = \phi(t), \quad t \in [-2\tau, 0]. \end{cases} \quad (8)$$

因此系统(8)的全局一致渐近稳定性将保证系统(5)的全局一致渐近稳定性^[3]. 构造如下 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T(t) P \mathbf{x}(t) + W(\mathbf{x}, t), \quad (9)$$

$$W(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^l \int_{-\tau_i}^0 \int_{t-\tau_j+\theta}^t \mathbf{x}^T(s) \tilde{A}_j^T(s + \tau_j) P_{ij}^{-1} \tilde{A}_j(s + \tau_j) \mathbf{x}(s) ds d\theta, \quad (10)$$

式中 P, P_{ij} 为对称正定矩阵, 沿式(8)的轨迹对 $V(\mathbf{x}, t)$ 求导

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{x}^T(t) \left[P \sum_{i=0}^l \tilde{A}_i + \left(\sum_{i=0}^l \tilde{A}_i \right)^T P \right] \mathbf{x}(t) - \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^l \int_{-\tau_i}^0 2\mathbf{x}^T(t) P \tilde{A}_i(t) \tilde{A}_j(t + \theta) \mathbf{x}(t - \tau_j + \theta) d\theta + \dot{W}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^l \tau_i \mathbf{x}^T(t) \tilde{A}_j^T(t + \tau_j) P_{ij}^{-1} \tilde{A}_j(t + \tau_j) \mathbf{x}(t) - \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^l \int_{-\tau_i}^0 \mathbf{x}^T(t - \tau_j + \theta) \tilde{A}_j^T(t + \theta) P_{ij}^{-1} \tilde{A}_j(t + \theta) \mathbf{x}(t - \tau_j + \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (12)$$

令 $X = P^{-1}, Y = KX$, 由引理1, 2不难发现, 如果 LMI(6)式成立则有 $\dot{V}(\mathbf{x}, t) < 0$. 因此有不确定系统(5)渐近稳定.

定理2. 给定 H_∞ 性能指标 $\gamma > 0$, 对于任意常数时滞 τ_i , 如果存在对称正定矩阵 X, Y, P_{ij}, Q_i , 以及标量 $\xi_{ij} > 0, \epsilon_i > 0, \alpha_j > 0, \zeta_i > 0, i = 1, \dots, l; j = 0, \dots, l$, 满足如下 LMI:

$$\begin{bmatrix} S & H_5 & (CX + DY)^T & B_w \\ H_5^T & -J_5 & 0 & 0 \\ CX + DY & 0 & -I & 0 \\ B_w^T & 0 & 0 & -\gamma^2 I + \sum_{i=1}^l \tau_i B_w^T Q_i B_w \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

式中 S 由式(6)定义, 其它矩阵定义如下:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_i &= [D_i \quad A_i], \tilde{J}_i = \text{diag}(\zeta_i, I, Q_i - \zeta_i E_i^T E_i), \quad i = 1, \dots, l, \\ H_5 &= [\tau_1 \tilde{H}_1 \quad \tau_2 \tilde{H}_2 \quad \dots \quad \tau_l \tilde{H}_l], \quad J_5 = \text{diag}(\tau_1 \tilde{J}_1, \tau_2 \tilde{J}_2, \dots, \tau_l \tilde{J}_l). \end{aligned}$$

则不确定状态滞后系统(1)可通过无记忆状态反馈 $\mathbf{u}(t) = YX^{-1} \mathbf{x}(t)$ 鲁棒 H_∞ 控制.

证明. 考虑系统(5), 显然 LMI(13)式包含了 LMI(6)式, 因此 LMI(13)式成立时系统(5)渐近稳定. 下面证明此时 $\|\mathbf{z}(t)\|$ 的上界为 $\gamma \|\mathbf{w}\|_2, \mathbf{w}(t) \in L_2[0, \infty)$. 假定 $\mathbf{x}(t) = 0, t \in [-\tau, 0]$, 并引入

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{z}^T(t)\mathbf{z}(t) - \gamma^2\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t)]dt,$$

构造 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t) + W_1(\mathbf{x}, t), \tag{14}$$

$$W_1(\mathbf{x}, t) = W(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^l \int_{-\tau_i}^0 \int_{t+\theta}^t \mathbf{w}^T(s)B_w^T Q_i B_w \mathbf{w}(s) ds d\theta, \tag{15}$$

式中 P, P_{ij}, Q_i 对称正定. 显然

$$\dot{W}_1(\mathbf{x}, t) = \dot{W}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^l \tau_i \mathbf{w}^T B_w^T Q_i B_w \mathbf{w} - \sum_{i=1}^l \int_{-\tau_i}^0 \mathbf{w}^T(t + \theta) B_w^T Q_i B_w \mathbf{w}(t + \theta) d\theta. \tag{16}$$

注意到零初始条件, 因此式(5)的状态轨迹满足

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=0}^l \tilde{A}_i(t)\mathbf{x} - \sum_{i=1}^l \int_{-\tau_i}^0 \tilde{A}_i \left\{ \sum_{j=0}^l \tilde{A}_j(t + \theta)\mathbf{x}(t - \tau_j + \theta) + B_w \mathbf{w}(t + \theta) \right\} d\theta + B_w \mathbf{w}(t),$$

$$\mathbf{x} = 0, \quad \forall t \leq 0.$$

因此 $V(\mathbf{x}, t)$ 关于时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{x}^T R_1 \mathbf{x} + \sum_{i=1}^l \tau_i \mathbf{w}^T B_w^T Q_i B_w \mathbf{w} + 2\mathbf{x}^T P B_w \mathbf{w}, \\ R_1 &= R + \sum_{i=1}^l \tau_i P [A_i (Q_i - \zeta_i E_i^T E_i)^{-1} A_i^T + \zeta_i^{-1} D_i D_i^T] P. \end{aligned}$$

因为闭环系统渐近稳定, 因此对于任意非零向量 $\mathbf{w}(t) \in L_2[0, \infty)$ 有

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{W}_1(\mathbf{x}, t) dt &= \int_0^\infty \left\{ \sum_{i=1}^l \sum_{j=0}^l \int_{-\tau_i}^0 [\mathbf{x}^T(t) \tilde{A}_j^T(t + \tau_j) P_{ij}^{-1} \tilde{A}_j(t + \tau_j) \mathbf{x}(t) - \right. \\ &\quad \left. \mathbf{x}^T(t - \tau_j + \theta) \tilde{A}_j^T(t + \theta) P_{ij}^{-1} \tilde{A}_j(t + \theta) \mathbf{x}(t - \tau_j + \theta)] d\theta + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^l \int_{-\tau_i}^0 [\mathbf{w}^T(t) B_w^T Q_i B_w \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}^T(t + \theta) B_w^T Q_i B_w \mathbf{w}(t + \theta)] d\theta \right\} dt = \\ &0, \end{aligned}$$

进一步有

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty [\mathbf{z}^T \mathbf{z} - \gamma^2 \mathbf{w}^T \mathbf{w} + \frac{d}{dt} V_1(\mathbf{x}, t)] dt - \mathbf{x}^T(\infty) P \mathbf{x}(\infty) \leq \\ &\int_0^\infty \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 + (C + DK)^T (C + DK) & P B_w \\ B_w^T P & -\gamma^2 I + \sum_{i=1}^l \tau_i B_w^T Q_i B_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} dt, \end{aligned}$$

由 Schur 补可知 $J < 0$ 当仅当 LMI(13) 式成立.

这两个定理根据 LMI 的可解性给出了不确定状态滞后系统(1)可鲁棒镇定以及可鲁棒 H_∞ 控制的时滞相关条件.

本文的结论由 LMI 描述, 目前 LMI 的解法已比较成熟, 这些不等式可直接由 MATLAB 的 LMI 工具箱求解, 不需调整任何参数.

参 考 文 献

1 Hale J. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer, 1977

- 2 Boyd, S, El Ghaoui L, Feron E and Balakrishnan V, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM, 1994
- 3 Su JH. Further results on the robust stability of linear systems with a single time delay. *Systems & Control Lett.*, 1994, **23**(5):375—379
- 4 Wang Y, Xie L and de Souza CE, Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Syst. Contr. Lett.*, 1992, **19**(2):139—149
- 5 曹永岩, 孙优贤. 具有多状态滞后的不确定时变时滞系统鲁棒镇定. *自动化学报*, 1998, **24**(3):377—381
- 6 Lee J H., Kim SW and Kwon WH, Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1994, **39**(1):159—162
- 7 Cao Y Y, Sun Y X, Cheng C -Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delays. To appear in *IEEE Trans. Auto. Control*, 1998, **43**(10):

曹永岩 1968年生. 1996年3月在浙江大学获工学博士学位, 1996年4月至1998年5月在浙江大学从事博士后研究, 1997年12月至1998年5月在香港大学机械工程系从事访问研究, 现为浙江大学工业控制技术研究所副研究员, 并于1998年7月获得德国洪堡研究奖学金到德国杜伊斯堡大学从事博士后研究. 感兴趣的研究领域为鲁棒控制, 时滞系统, 容错控制等.

孙优贤 1940年生. 浙江大学工业控制技术研究所教授, 博士生导师, 中国工程院院士.