第25卷 第3期
1999年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 25, No. 3
May, 1999

研究简报

线性不确定时滞系统的 H_∞ 无记忆控制器设计

顾永如 李歧强 钱积新
(浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027)

关键词 不确定系统,时滞,鲁棒 H_∞ 控制,Riccati 方程.

MEMORYLESS H_∞ CONTROLLER DESIGN FOR LINEAR UNCERTAIN TIME-DELAY SYSTEMS

GU Yongru LI Qiqiang QIAN Jixin
(*Inst. Indu. Process Control, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Key words Uncertain system, time delay, robust H_∞ control, Riccati equation.

1 引言

近年来,H_∞控制理论得到了迅速发展,并提出了许多 H_∞控制器的设计方法.在文[1]中首次采用代数 Riccati 方程(ARE)解决了一类无时滞确定性系统的 H_∞控制器的设计问题;在文[2,3]中,基于 ARE 的 H_∞控制器设计方法被推广到含有时滞的线性系统,但他们只考虑了分别仅含有控制或状态滞后的系统,且仅局限于确定性系统.本文针对一类同时含有状态和控制滞后的不确定系统研究了其 H_∞控制,给出了基于 ARE 的 H_∞控制器设计方法.

2 问题描述

考虑由方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + \Delta A)\boldsymbol{x}(t) + (A_1 + \Delta A_1)\boldsymbol{x}(t - h_1) + B\boldsymbol{u}(t) + B_1\boldsymbol{u}(t - h_2) + D\boldsymbol{w}(t), \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{z}(t) = E\boldsymbol{x}(t) \tag{1b}$$

描述的系统.上式中 $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是系统状态向量;$\boldsymbol{u}(t)\in R^m$ 是控制向量;$\boldsymbol{w}(t)\in R^p$ 为平方可积的干扰输入矢量;$\boldsymbol{z}(t)\in R^q$ 是被控输出;A, A_1, B, B_1, D 和 E 为适当维数的常数矩

收稿日期 1996-12-23 收修改稿日期 1998-09-04

阵;h_1,h_2为时滞;ΔA 和 ΔA_1为范数有界的不确定性并且可写成如下形式

$$[\Delta A \quad \Delta A_1] = GF[H \quad H_1], \tag{2}$$

其中G,H 和 H_1为一组定义了不确定性结构的具有适当维数的常数矩阵,矩阵 F 代表了一类参数不确定性,它属于如下集合

$$\mathscr{F} = \{F: F^{\mathrm{T}}F \leqslant I\}. \tag{3}$$

对系统(1),考虑构造线性状态无记忆反馈控制器 $\boldsymbol{u}(t)=K\boldsymbol{x}(t)$,其中 $K\in R^{m\times n}$为一常数矩阵,则从 $\boldsymbol{w}$ 到 $\boldsymbol{z}$ 的闭环传递函数为

$$T_{zw}(s) = E(sI - A - BK - \Delta A - A_1e^{j\omega h_1} - \Delta A_1 e^{-j\omega h_1} - B_1Ke^{-j\omega h_2})^{-1}D. \tag{4}$$

因此,我们的设计问题可表述为构造一个控制器 $\boldsymbol{u}(t)$使系统(1)闭环渐近稳定,并保证对所有容许的不确定性,有$\|T_{zw}\|_\infty \leqslant \gamma$,其中 γ 是一预先给定好的正标量.

3 主要结果

引理1. 对于系统(1),当采用控制律

$$\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\varepsilon}R^{-1}B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t) \tag{5}$$

时,闭环系统是渐近稳定的,其中 ε 为一正标量,P 和 R 是正定矩阵且满足如下的矩阵不等式

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + H^{\mathrm{T}}H + H_1^{\mathrm{T}}H_1 + I - \frac{1}{\varepsilon}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\varepsilon}PB_1R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P + PA_1A_1^{\mathrm{T}}P + 2PGG^{\mathrm{T}}P < 0. \tag{6}$$

证明. 对于系统(1),当采用控制律(5)时,在无扰动输入情况下,闭环系统可写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + GFH - \frac{1}{\varepsilon}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P)\boldsymbol{x} + (A_1 + GFH_1)\boldsymbol{x}_{h_1} - \frac{1}{\varepsilon}B_1R^{-1}B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}_{h_2}, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{x}_{h_1}$和 $\boldsymbol{x}_{h_2}$分别表示 $\boldsymbol{x}(t)$,$\boldsymbol{x}(t-h_1)$和 $\boldsymbol{x}(t-h_2)$. 采用 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} + \int_{t-h_1}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)(I + H_1^{\mathrm{T}}H_1)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t-h_2}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s, \tag{8}$$

不难得到,当无干扰输入时,$V(\boldsymbol{x})$沿系统(7)的导数满足

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leqslant - \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\bar{Q}\,\bar{\boldsymbol{x}}, \tag{9}$$

其中 $\bar{Q}=\begin{bmatrix} -S & PB_1R^{-1} \\ R^{-1}B_1^{\mathrm{T}}P & \varepsilon R^{-1}\end{bmatrix}$, $\bar{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \frac{1}{\varepsilon}B^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}_{h_2}\end{bmatrix}$, $S=PA+A^{\mathrm{T}}P+H^{\mathrm{T}}H+H_1^{\mathrm{T}}H_1+I+2PGG^{\mathrm{T}}P+PA_1A_1^{\mathrm{T}}P-\frac{1}{\varepsilon}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P$. 由矩阵不等式(7)知,矩阵 $\bar{Q}$ 是正定的,因此闭环系统是鲁棒渐近稳定的. 证毕.

定理1. 给定正常数 γ,考虑系统(1),假设对于某一正标量 ε 和正定矩阵 R 和 Q,ARE

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + H^{\mathrm{T}}H + H_1^{\mathrm{T}}H_1 + I - \frac{1}{\varepsilon}PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\varepsilon}PB_1R^{-1}B^{\mathrm{T}}P + PA_1A_1^{\mathrm{T}}P + 2PGG^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\gamma}E^{\mathrm{T}}E + \frac{1}{\gamma}PDD^{\mathrm{T}}P = - \varepsilon Q \tag{10}$$

有正定解 P 存在,则当采用控制律(5)时,闭环系统是鲁棒渐近稳定的,且对于所有容许不确定性闭环传递函数 T_{zw}的 H_∞范数不大于 γ,即$\|T_{zw}\|_\infty \leqslant \gamma$.

证明. 根据引理1,控制器(5)使系统(1)鲁棒渐近稳定. 同时由 ARE(10),不难得到

$$T_{zw}^*(j\omega)T_{zw}(j\omega)=\gamma^2I-[V(j\omega)-\gamma I]^*[V(j\omega)-\gamma I]-\gamma D^{\mathrm T}W^{-*}(j\omega)\times [\varepsilon Q+U_1+U_2+U_3+U_4]W^{-1}(j\omega)D, \tag{11}$$

其中

$$U_1=PGG^{\mathrm T}P+H^{\mathrm T}H-PGFH-H^{\mathrm T}F^{\mathrm T}G^{\mathrm T}P,$$

$$U_2=PGG^{\mathrm T}P+H_1^{\mathrm T}H_1-H_1^{\mathrm T}F^{\mathrm T}G^{\mathrm T}Pe^{j\omega h_1}-PGFH_1e^{-j\omega h_1},$$

$$U_3=I+PA_1A_1^{\mathrm T}P-PA_1e^{-j\omega h_1}-A_1^{\mathrm T}Pe^{j\omega h_1},$$

$$U_4=\frac{1}{\varepsilon}(PBR^{-1}B^{\mathrm T}P+PBR^{-1}B_1^{\mathrm T}Pe^{j\omega h_2}+PB_1R^{-1}B^{\mathrm T}Pe^{-j\omega h_2}+PB_1R^{-1}B_1^{\mathrm T}P),$$

$$W(j\omega)=j\omega I-A-\Delta A+\frac{1}{\varepsilon}BR^{-1}B^{\mathrm T}P-(A_1+\Delta A_1)e^{-j\omega h_1}+\frac{1}{\varepsilon}B_1R^{-1}B^{\mathrm T}Pe^{-j\omega h_2}. \tag{12}$$

根据矩阵不等式 $X^*Y+Y^*X\leqslant X^*X+Y^*Y$,有

$$U_1\geqslant 0,\quad U_2\geqslant 0,\quad U_3\geqslant 0,\quad U_4\geqslant 0. \tag{13}$$

因而有

$$T_{zw}^*(j\omega)T_{zw}(J\omega)\leqslant\gamma^2I,\qquad \forall\,\omega\in R, \tag{14}$$

即

$$\|T_{zw}\|_\infty\leqslant\gamma. \tag{15}$$

4　结论

本文通过 Riccati 方程,针对一类具有状态及控制滞后的线性不确定系统提出了一种鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法. 通过求解 ARE(10)得到的 H_∞ 控制器不但保证闭环系统鲁棒渐近稳定,同时对于所有容许不确定性,闭环传递函数 H_∞ 范数小于某一常数. 本文是针对一般情形研究的,而文[2,3]中相应的结果只是本文的特殊情形.

参 考 文 献

1 Petersen I R. Disturbance attenuation and H_∞ optimization: a design method based on the algebraic Riccati equation, *IEEE Trans. Autom. Control*, 1987, **AC-32**: 427—429

2 Lee J H, Kim S W, Kwon W H. Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **AC-39**: 159—162

3 Choi H H, Chung M J. Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control. *Automatica*, 1995, **31**: 917—919

顾永如　1970年生. 1995年于浙江大学光科系获硕士学位,现在浙江大学从事自动化仪表开发等工作. 主要研究方向为智能仪器及生产过程自动化.

李歧强　1964年生. 1998年获浙江大学博士学位,现为山东工业大学副教授. 主要研究方向为神经网络控制及鲁棒控制.

钱积新　1939年生. 1964年毕业于清华大学电机系,现为浙江大学工业控制技术研究所教授、博士生导师. 主要从事复杂工业过程系统的优化、控制研究及教育工作.