



固定阶数的结构奇异值反馈控制器的设计¹⁾

赵闻飙 施颂椒 夏伟

(上海交通大学自动化系 上海 200030)

关键词 结构式不确定性, 结构奇异值, μ 综合.

A NEW APPROACH OF μ -SYNTHESIS

ZHAO Wenbiao SHI Songjiao XIA Wei

(Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

Key words Structured uncertainty, structured singular value, μ -synthesis.

1 引言

目前常用的结构奇异值综合算法仍是 D-K 交替寻优算法^[2]和 μ -K 交替寻优算法^[3], 但这两种算法计算繁复, 得到的控制器阶数也较高, 造成数值计算上的困难, 使结构奇异值理论难以为工程应用所接受. 因此, 研究便于工程应用的 μ 综合方法是 μ 理论的一个重要课题.

2 一种结构奇异值综合的新算法

μ 综合问题是结构奇异值理论的一个重要分枝. 如图1所示, G 为被控对象, K 为控制器, 其中 $M = F_1(G, K)$. μ 综合问题即为寻求一个控制器 K , 使 M^* 满足 $\inf_K \|M\|_\mu = \|M^*\|_\mu$. 文 [4] 采用了 Powell 法进行控制器的设计. 但 Powell 法在优化过程中仅仅利用了目标函数值的信息, 而丢弃了函数的许多内在性质, 因此在寻优过程中收敛速度较慢. 而结构奇异值函数的复杂性使得对其直接进行求导又异常困难,

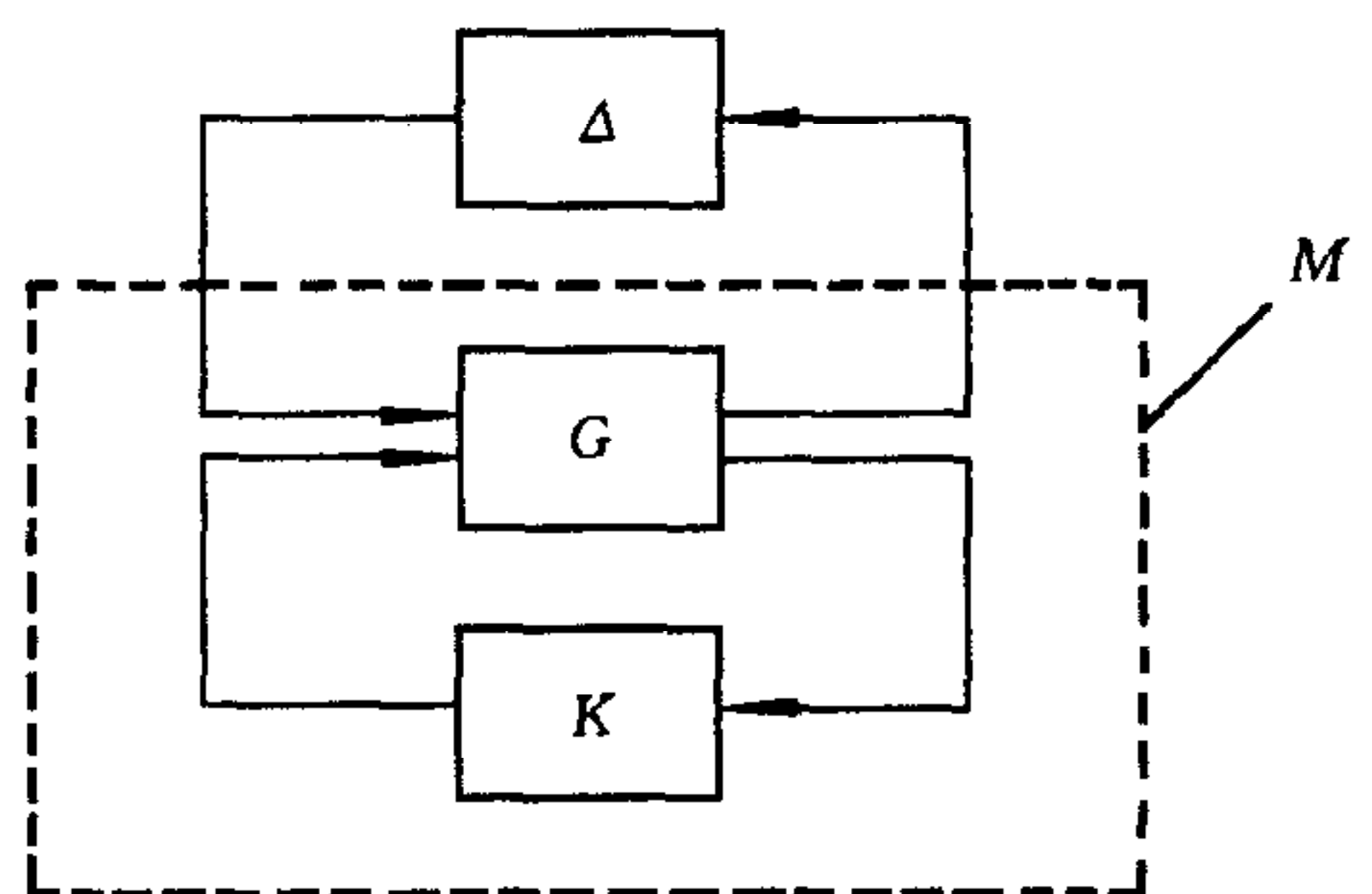


图1

1) 国家自然科学基金和高校博士点基金资助项目.

因此本文用差分代替导数来对 μ 进行综合,这在某种程度上反映了函数的内在性质. 设受控系统 G 的状态空间表达形式为

$$\begin{bmatrix} dx/dt \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中 $A \in R^{n \times n}$, $B_1 \in R^{n \times m}$, $B_2 \in R^{n \times q}$, $C_1 \in R^{l_1 \times n}$, $C_2 \in R^{l_2 \times n}$, $D_{11} \in R^{l_1 \times m}$, $D_{12} \in R^{l_1 \times q}$, $D_{21} \in R^{l_2 \times m}$, $D_{22} \in R^{l_2 \times q}$, $M = M(G, K) = F_l(G, K)$.

对于本节特定的 μ 综合算法,必须另外考虑:1) 由于对 μ 直接求导数很困难,所以在优化过程中将所有的导数换成微分;2) 对系统(1),如果用状态反馈,将 $u = Kx$ 代入式(1),应有

$$z = \{(C_1 + D_{12}K)[sI - (A + B_2K)]^{-1}B_1 + D_{11}\}W,$$

即 $M = (C_1 + D_{12}K)[sI - (A + B_2K)]^{-1}B_1 + D_{11}$. 此处优化问题的形式为 $\inf_k \|M(K)\|_\mu = \|M(K^*)\|_\mu$,所以对结构奇异值进行综合的具体的差分拟牛顿算法可表述如下:

1) 设定控制矩阵的初值为 K^0 ,度量矩阵的初值为 H^0 ,终止误差 $\epsilon > 0$,这里应注意到 K^0 的维数是 $q \times n$, H^0 是 $qn \times qn$ 的单位矩阵,并且选取的 K^0 必须满足 $\Lambda(A + B_2K^0) \subset LHP$;

2) 令 $S(K) = \|M(K)\|_\mu$,计算差分 $\nabla S(K^0)$,如果 $\|\nabla S(K^0)\| \leq \epsilon$,则输出结果,否则转3);

3) 令 $P^0 = -H_0 \nabla S(K^0)$, $i := 0$;

4) 进行一维搜索,寻找 t_i ,使得 $S(K^i + t_i p^i) = \min_{t \geq 0} S(K^i + t p^i)$,同时满足

$$\Lambda(A + B_2K^i) \subset LHP, \text{ 令 } K^{i+1} = K^i + t_i p^i;$$

5) 计算差分 $\nabla S(K^{i+1})$,若 $\|\nabla S(K^{i+1})\| \leq \epsilon$,则输出结果并结束,否则转6);

6) 检验迭代轮数,若 $i+1 = q \times n$,则令 $K^0 = K^{i+1}$ 并转3),否则转7);

7) 构造变度量方向,令 $\Delta g_i = \nabla S(K^{i+1}) - \nabla S(K^i)$, $\Delta K_i = K^{i+1} - K^i$,

$$H_{i+1} = H_i + \frac{\Delta K_i \Delta K_i^T}{\Delta K_i^T \Delta g_i} \left[1 + \frac{\Delta g_i^T H_i \Delta g_i}{\Delta K_i^T \Delta g_i} \right] - \frac{1}{\Delta K_i^T \Delta g_i} [\Delta K_i \Delta g_i^T H_i + H_i \Delta g_i \Delta K_i^T],$$

取 $P^{i+1} = -H_{i+1} \nabla S(K^{i+1})$,令 $i := i+1$,转4).

3 设计实例

3.1 状态反馈控制器设计

例1. 在式(1)中,设被控系统的状态空间表达式为

$$A = \begin{bmatrix} -0.007 & -0.0035245 & 0 \\ 0 & -2.5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.007 & 0.007 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -142.571 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0052472 & -0.0026236 \\ 49.7188 & -0.00098393 & -0.175 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2811 & 0.2811 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0.5004 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

这样 $Z=MW$, 其中 $M=(C_1+D_{12}K)[sI-(A+B_2K)]^{-1}B_1+D_{11}$. 由上节的优化算法, 本例中 $n=3, q=1$. 设定状态反馈控制器初值 $K_1^0 = [-9.2157 \times 10^6 \quad -0.5775 \quad -3.2500 \times 10^6]$. 注意在选择初值时, 需保证使系统的极点配置在左半平面, 此时有 $\|M\|_\mu = 280.4103$, 如图2所示. 于是, 通过寻优, 可找到一个局部最优状态反馈控制器, 即当 $K_1^* = [-0.088735 \times 10^8 \quad -0.13207 \times 10^8 \quad -1.11845 \times 10^8]$ 时, 有 $\|M^*\|_\mu = 50.05390$, 如图3所示. 此结果优于文[4]中的 $\|M^*\|_\mu = 101.27883$.

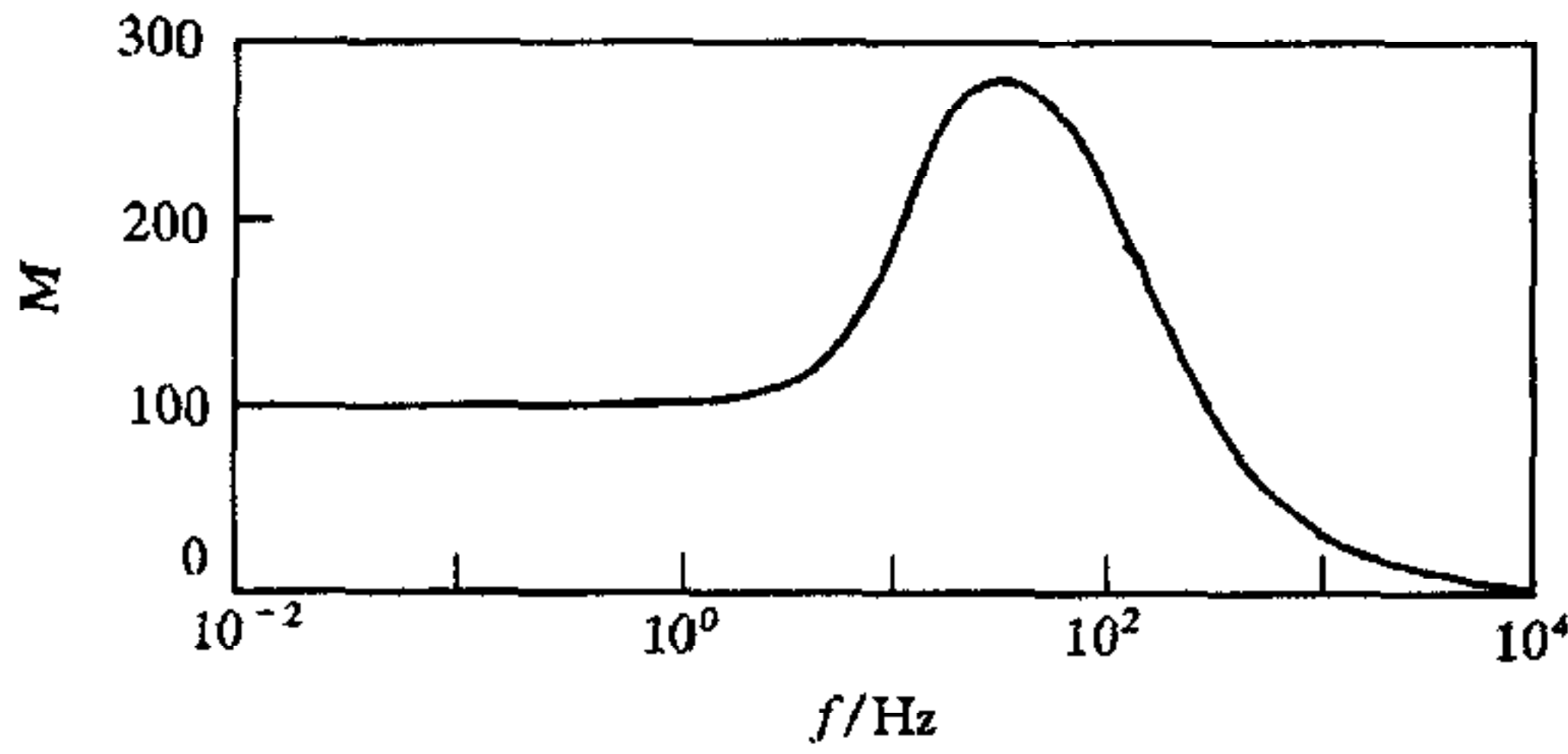


图2 $K=K_1^0$ 时的 μ 曲线

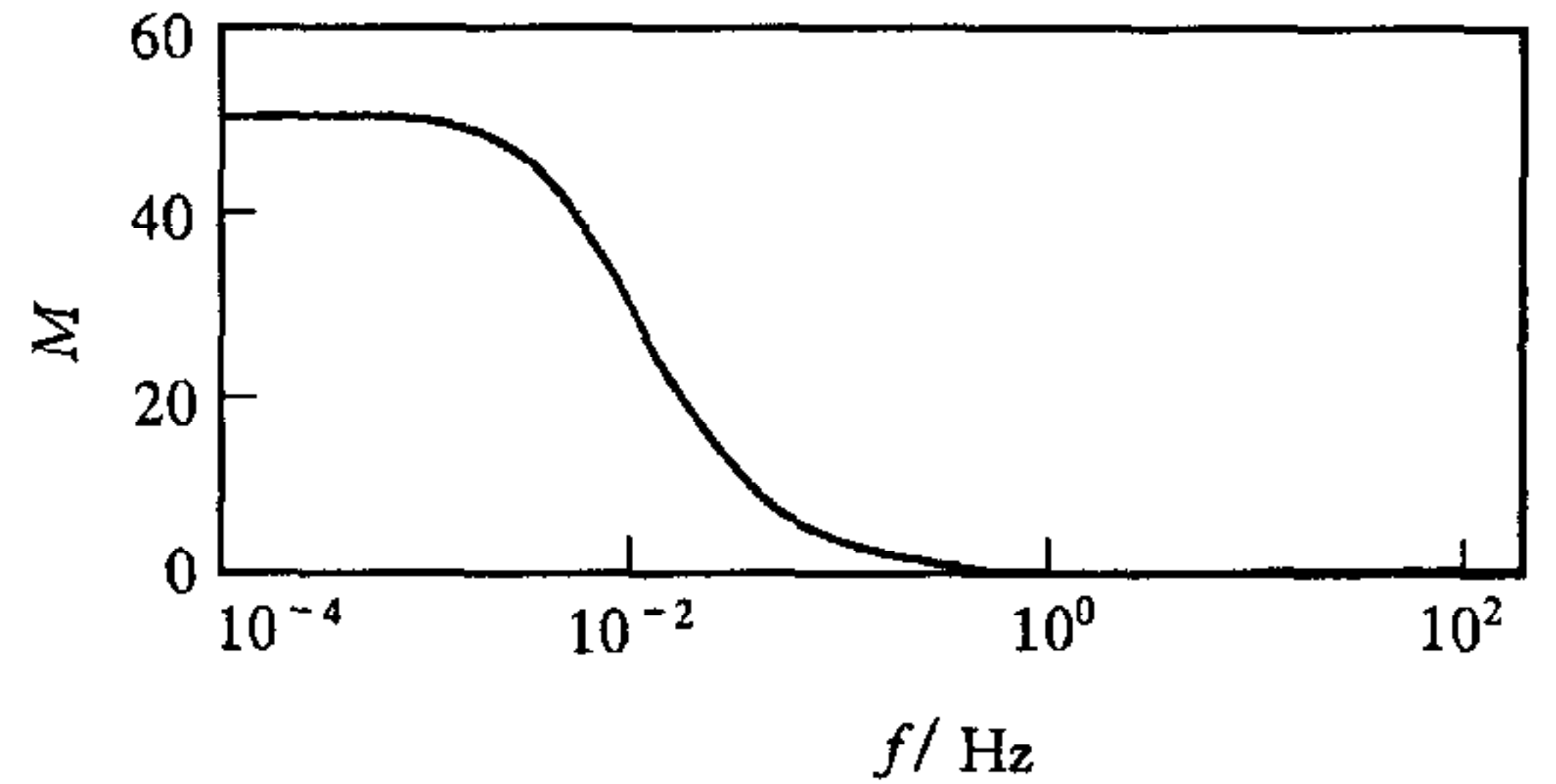


图3 $K=K_1^*$ 时的 μ 曲线

上面得到的最优状态反馈控制器增益值相当大, 这显然是无法在工程实际中得到应用的. 另一方面, 由于在结构奇异值综合问题中一般无法找到全局最优解, 即所找到的解一般都是局部极值, 所以有必要从不同的初值点出发寻优. 另取初值 $K_2^0 = [0 \quad 0 \quad 0]$, 可得到初始情况下 $\|M(K_2^0)\|_\mu = 49.9948$, 如图4所示. 通过寻优, 最终得到: 当 $K_2^* = [-2.02046 \quad -0.02890 \quad 0.000032]$ 时, 对应的 $\|M^*\|_\mu = 1.755409$, 如图5所示. 而根据文[4]的值计算得到 $\|M^*\|_\mu = 9.0519$. 此处的结果大大优于文[4]中的解.

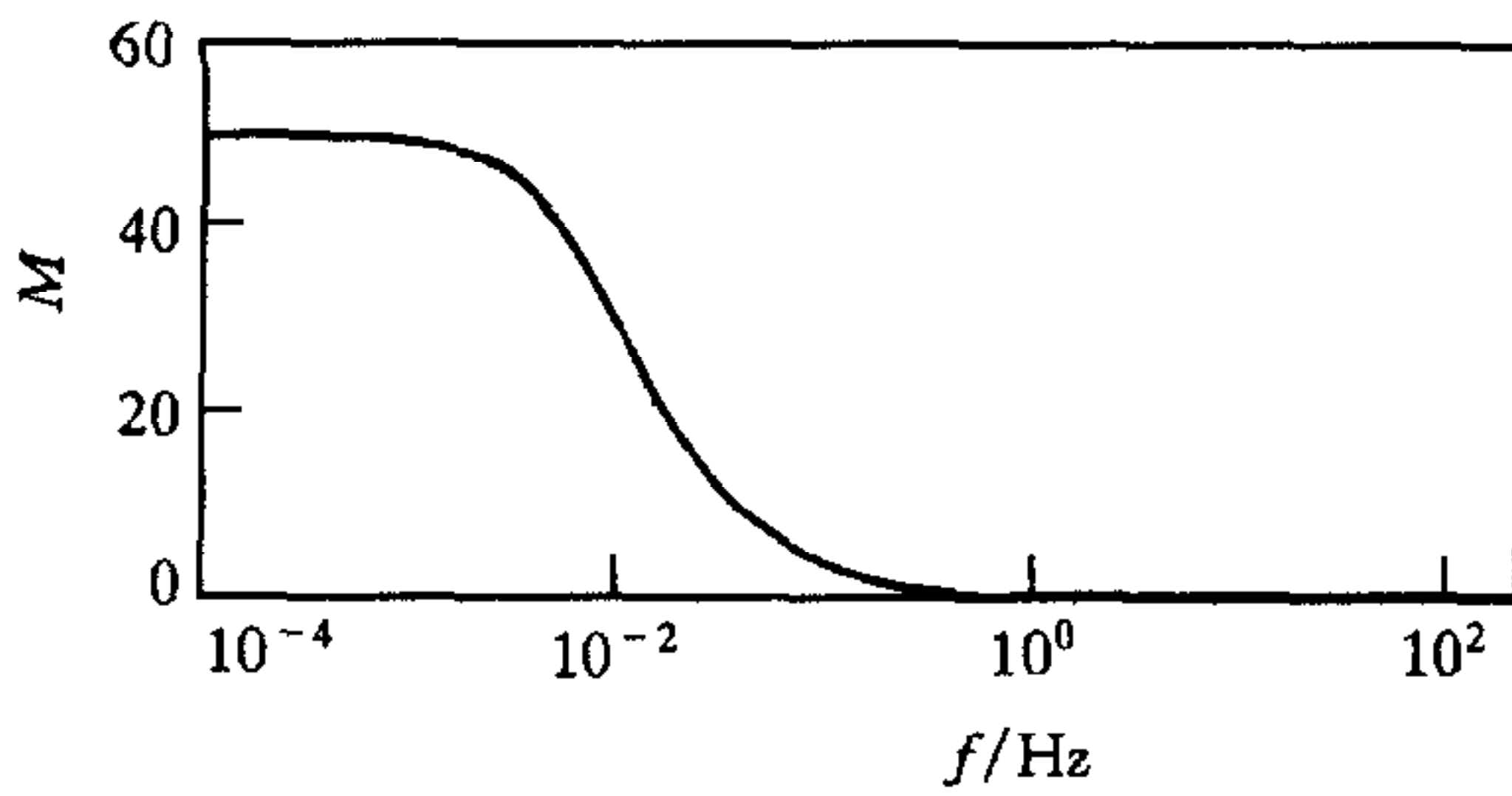


图4 $K=K_2^0$ 时的 μ 曲线

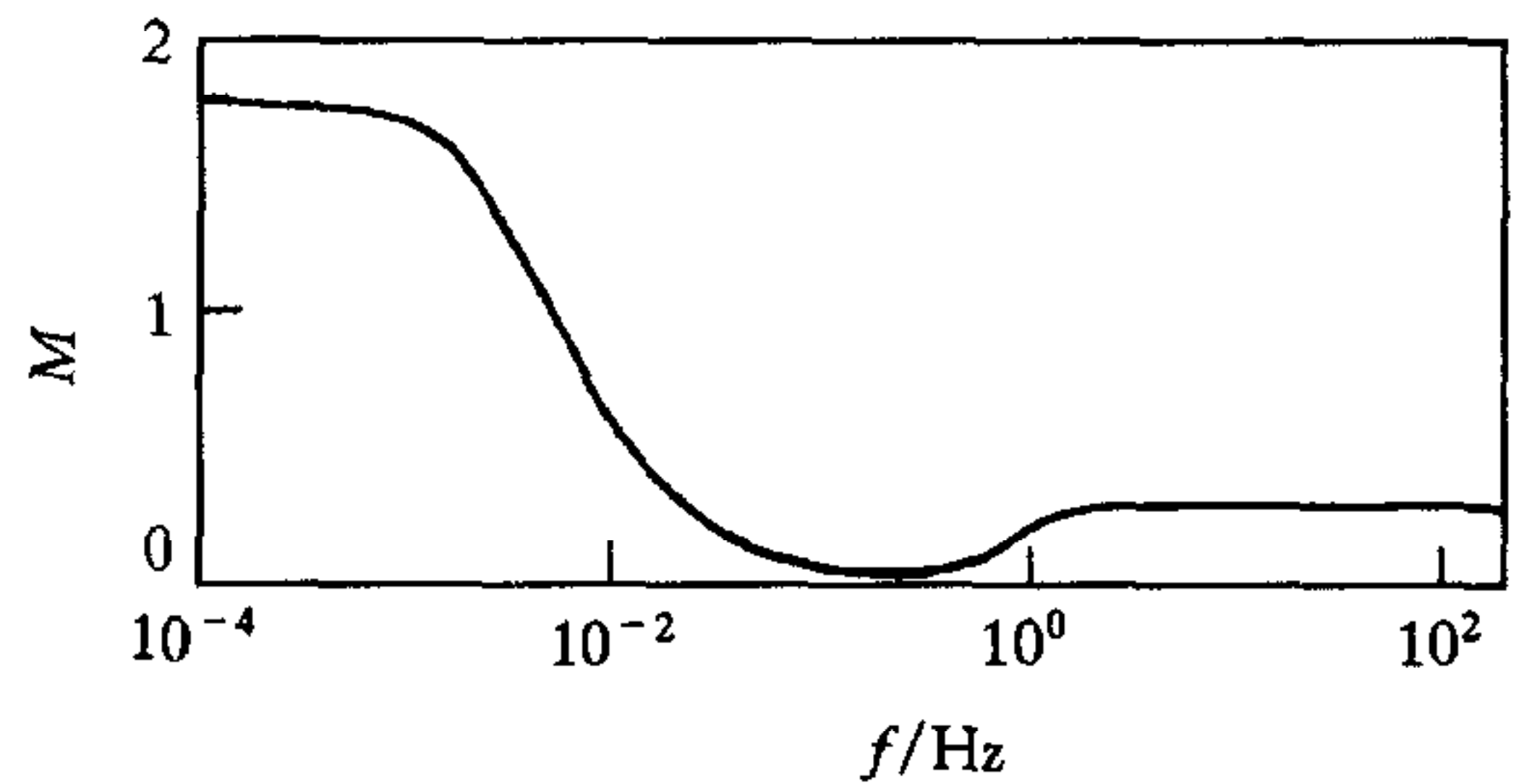


图5 当 $K=K_2^*$ 时的 μ 曲线

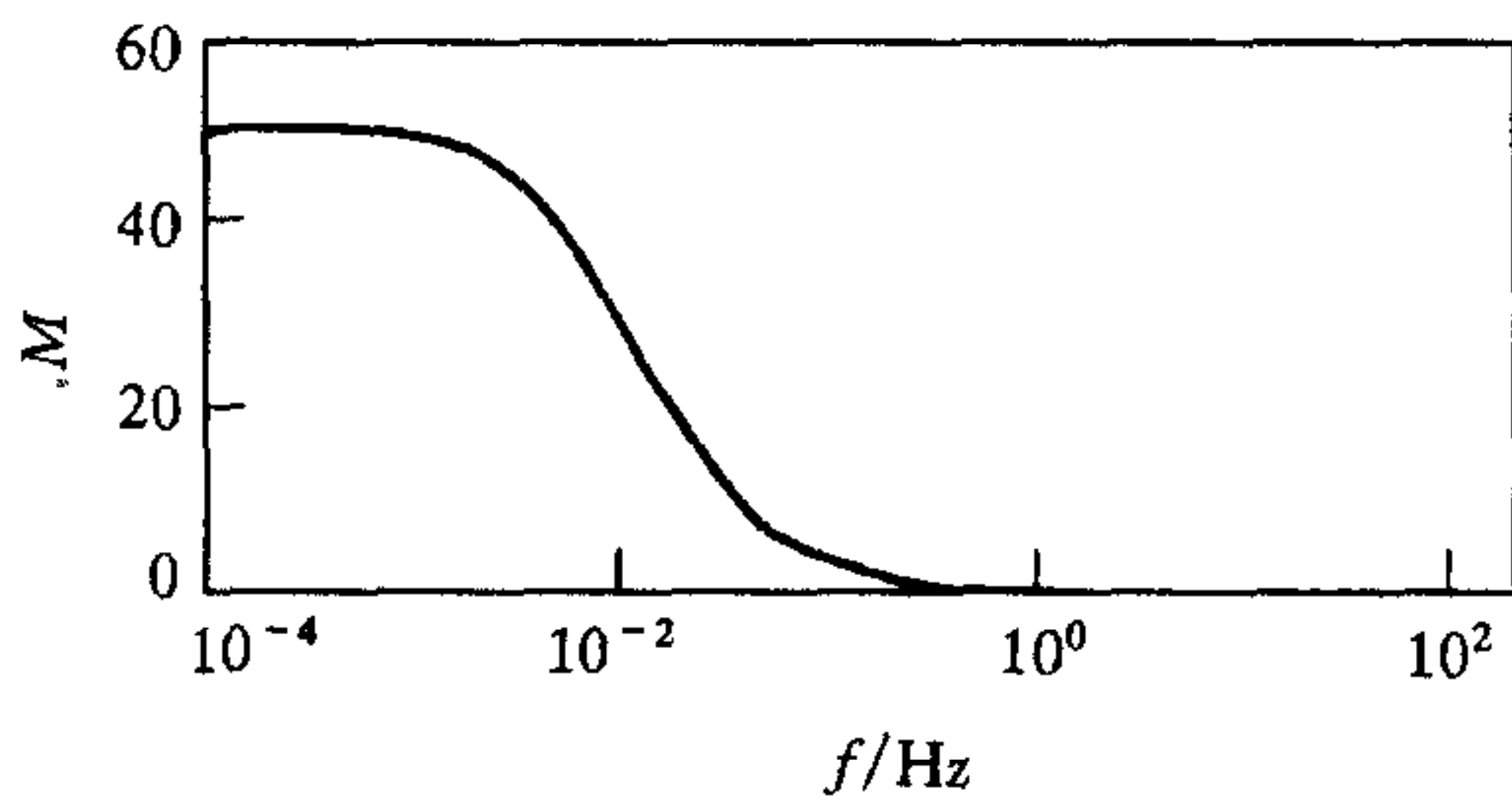
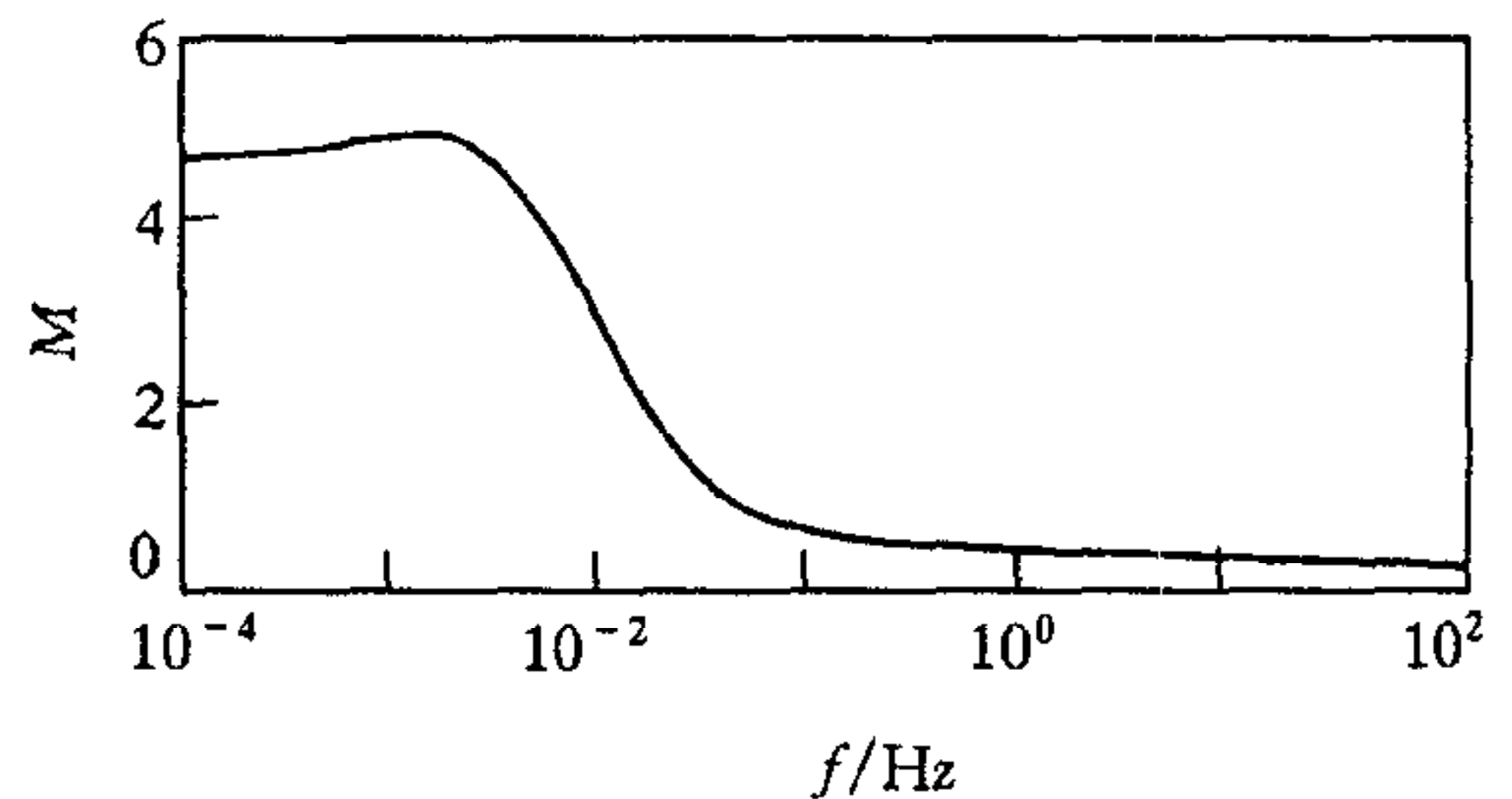
3.2 输出反馈控制器的设计

例2. 假设另有 $D_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, D_{22} = 0, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 对输出反馈, 将 $u=Ky$ 代入式(1)得

$$\dot{X} = (A + B_2KC_2)X + (B_1 + B_2KD_{21})w,$$

$$z = (C_1 + D_{12}KC_2)X + (D_{11} + D_{12}KD_{21})w.$$

这样 $z = \{(C_1 + D_{12}KC_2)[sI - (A + B_2KC_2)]^{-1}(B_1 + B_2KD_{21}) + D_{11} + D_{12}KD_{21}\}w, M = (C_1 + D_{12}KC_2)[sI - (A + B_2KC_2)]^{-1}(B_1 + B_2KD_{21}) + D_{11} + D_{12}KD_{21}$. 取输出反馈控制器的初值 $K_0 = [0 \quad 0]$, 在初始情况下 $\|M(K_0)\|_\mu = 49.99480$, 如图6所示, 通过上述算法寻优, 可以得到: 当 $K^* = [-0.0017820 \quad -0.0052095]$ 时, $\|M(K^*)\|_\mu = 4.91527$, 如图7所示.

图6 $K=K_0$ 时的 μ 曲线图7 $K=K^*$ 时的 μ 曲线

3.3 关于反馈控制器初始参数选择的讨论

1) 结构奇异值的综合问题是一个多局部极值问题. 弥补这一缺陷的方法是通过从多个初始点进行寻优, 从中找到一个“最好”的解.

2) 从上面的设计可以发现, 最优值往往就在初始值附近. 这也就进一步证实了我们找到的“最优”解仅仅是局部的最优解. 同时为了防止反馈增益过大, 使求得的控制器能真正运用于工程实际问题, 在选择初始值时就考虑使 K^0 的增益处于允许范围内, 否则设计得到的控制器常常无法实现.

4 结论

结构奇异值的综合是一个相当困难的问题. 本文针对 μ 函数性质相当复杂这一特性, 运用非线性规划中的差分拟牛顿算法对 μ 进行综合, 得到了较好的结果. 本文的综合算法同以前的结构奇异值综合算法有着明显的不同. 该方法简单方便, 得到的是一个定常输出(或状态)反馈矩阵, 而不像原有 $D-K$, $\mu-K$ 综合方法得到的是控制器的传递函数, 且在每次迭代过程中不需要进行传递函数矩阵的拟合运算, 减少了计算量, 并且不存在控制器的阶数问题, 具有很大工程实际应用价值.

参 考 文 献

- 1 Doyle J C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. In: IEE Proc., Part D, 1982, 129(6):242-250
- 2 Doyle J C. Structured uncertainty in control systems design. IEEE CDC, 1985:260-265
- 3 Lin J L, Postlethwaite I, Gu D W. μ -K iteration: A new algorithm for μ -synthesis. Automatica, 1993, 29(1):219-224
- 4 丛山. 线性系统鲁棒控制器的 μ 综合[学位论文]. 上海: 上海交通大学, 1994.

赵闻飙 1968年生, 1994年获清华大学硕士学位, 1997年获上海交通大学博士学位. 主要研究领域为 H^∞ 控制、结构奇异值理论及人工神经网络在控制工程中的应用.

施颂椒 1933年生, 教授, 博士生导师. 主要研究方向为鲁棒控制、自适应控制理论及应用.