第25卷 第3期
1999年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 25, No. 3
May, 1999

短文

一类不确定非完整动力学系统的时变镇定[1)]

董文杰　　霍　伟
（北京航空航天大学第七研究室　北京　100083）

摘　要　对于一类具有未知惯性参数的非完整动力学系统，提出了新的时变自适应镇定律，将其用于一类移动机器人的位姿镇定中．仿真结果验证了所提控制方法的有效性．

关键词　非完整控制系统，不确定非线性系统，自适应控制，移动机器人．

TIME-VARYING STABILIZATION OF UNCERTAIN DYNAMIC NONHOLONOMIC SYSTEMS

DONG Wenjie　HUO Wei
(*The Seventh Research Division, Beijing University of Aero. and Astro., Beijing* 100083)

Abstract　A new time-varying adaptive control law is given for a class of dynamic nonholonomic chained systems with unknown constant inertia parameters. An application to a wheeled mobile robot is described. Simulation results show that the approach is effective.

Key words　Nonholonomic control, uncertain nonlinear system, adaptive control, wheeled mobile robot.

1　问题描述

近年来，非完整控制系统受到越来越多的重视．以前的研究主要集中于非完整运动学系统，但实际系统常是惯性参数不能精确知道的动力学系统．为此，本文研究这类系统的镇定问题，提出一种新的自适应控制律．

受非完整约束机械系统的一般方程为

$$H(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + G(\boldsymbol{q}) = B(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\tau} + J^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\lambda}, \tag{1}$$

$$J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = 0, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{q}=[q_1,\cdots,q_n]^{\mathrm{T}}$，$H(\boldsymbol{q})$是 $n\times n$ 正定对称阵，$C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}$ 表示哥氏力和离心力，$G(\boldsymbol{q})$是

1)国家自然科学基金资助课题.
收稿日期　1997-06-24　收修改稿日期　1997-10-29

重力项,$B(\boldsymbol{q})$是 $n\times m$ 满秩阵($2\leqslant m<n$),$J(\boldsymbol{q})$是$(n-m)\times n$ 满秩矩阵,$\boldsymbol{\lambda}$ 是$(n-m)$维 Lagrange 乘子,$\boldsymbol{\tau}$ 是控制输入.假定约束(2)是完全非完整的.式(1)有两个性质:1)适当定义 C,$\dot{H}-2C$ 是反对称阵;2)$H(\boldsymbol{q})\dot{\xi}+C(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\xi+G(\boldsymbol{q})=Y(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\xi,\dot{\xi})\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}$ 是常值惯性参数向量,$Y(\cdot)$是与 $\boldsymbol{a}$ 无关的已知矩阵.

设 $g(\boldsymbol{q})=[g_1(\boldsymbol{q}),\cdots,g_m(\boldsymbol{q})]$的列构成 $J(\boldsymbol{q})$零空间的基,则知存在 $\boldsymbol{v}$ 使得

$$\dot{\boldsymbol{q}}=g(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v}=g_1(\boldsymbol{q})v_1+\cdots+g_m(\boldsymbol{q})v_m. \tag{3}$$

上式两边求导并代入式(1)中,然后再同乘以 $g^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})$得到

$$H_1(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{v}}+C_1(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{v}+G_1(\boldsymbol{q})=B_1(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\tau}, \tag{4}$$

其中 $H_1=g^{\mathrm{T}}Hg$,$C_1=g^{\mathrm{T}}H\dot{g}+g^{\mathrm{T}}Cg$, $G_1=g^{\mathrm{T}}G$, $B_1=g^{\mathrm{T}}B$. 式(3),(4)描述了消去约束反力后的系统(1),(2).假定 $H_1(\boldsymbol{q})\geqslant\lambda I>0$,且 $B_1(\boldsymbol{q})$是满秩的.

研究的问题是,$\boldsymbol{a}$ 未知时如何设计控制律使系统(3),(4)的状态 $\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 渐近趋于零点.

2　主要结果

为便于设计,假设式(3)已经状态和输入变换化为如下两输入的链式系统

$$\dot{q}_1=v_1,\quad \dot{q}_2=v_2,\quad \dot{q}_j=v_1q_{j-1}(3\leqslant j\leqslant n). \tag{5}$$

对于一般 m 输入链式系统也可类似讨论,此处从略.取同胚变换 $\boldsymbol{x}=\phi(\boldsymbol{q})$:

$$x_1=q_1,\quad x_2=q_2,\quad x_k=\sum\nolimits_{i=0}^{k-2}(-1)^i\frac{q_1^{k-2-i}}{(k-2-i)!}q_{i+2}\quad(3\leqslant k\leqslant n), \tag{6}$$

式(5)和(4)等价变换为

$$\dot{x}_1=v_1,\quad \dot{x}_2=v_2,\quad \dot{x}_j=\frac{x_1^{j-2}v_2}{(j-2)!}\quad(3\leqslant j\leqslant n), \tag{7a}$$

$$H_2(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{v}}+C_2(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{v}+G_2(\boldsymbol{x})=B_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\tau}, \tag{7b}$$

其中 $H_2(\boldsymbol{x})=H_1(\boldsymbol{q})\big|_{q=\phi^{-1}(x)}$,$C_2(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})=C_1(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\big|_{q=\phi^{-1}(x)}$,$G_2(\boldsymbol{x})=G_1(\boldsymbol{q})\big|_{q=\phi^{-1}(x)}$,$B_2(\boldsymbol{x})=B_1(\boldsymbol{q})\big|_{q=\phi^{-1}(x)}$. 易证 $\dot{H}_2-2C_2$是反对称阵,$H_2(\boldsymbol{x})\dot{\xi}+C_2(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\xi+G_2(\boldsymbol{x})=\Phi(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\xi,\dot{\xi})\boldsymbol{a}$,$\Phi(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\xi,\dot{\xi})$与 $\boldsymbol{a}$ 无关.设 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的估计值,当 $\boldsymbol{a}$ 取值为 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 时 H_2,C_2和 G_2的对应值分别记为 $\hat{H}_2$,$\hat{C}_2$和 $\hat{G}_2$.

定理.对于系统(7),令

$$\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix}\dfrac{\omega}{k_1}\sin\omega t\sum\nolimits_{i=2}^{n}k_ix_i^2-k_1[k_1x_1+\cos\omega t\sum\nolimits_{i=2}^{n}k_ix_i^2]\\ -\sum\nolimits_{i=2}^{n}\dfrac{k_ix_1^{i-2}x_i}{(i-2)!}[1+2(k_1x_1+\cos\omega t\sum\nolimits_{i=2}^{n}k_ix_i^2)\cos\omega t]\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}k_1(k_1x_1+\cos\omega t\sum\nolimits_{i=2}^{n}k_ix_i^2)\\ \sum\nolimits_{i=2}^{n}\dfrac{k_ix_1^{i-2}x_i}{(i-2)!}[1+2\cos\omega t(k_1x_1+\cos\omega t\sum\nolimits_{i=2}^{n}k_ix_i^2)]\end{bmatrix},$$

式中 $\omega>0$,$k_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$,$K_p>0$,$\Gamma>0$,则控制律

$$\boldsymbol{\tau}=B_2^{-1}(\boldsymbol{x})[\hat{H}_2\dot{\boldsymbol{\eta}}+\hat{C}_2\boldsymbol{\eta}+\hat{G}_2-K_p(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{\sigma}], \tag{8}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{a}}} = -\Gamma^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\eta},\dot{\boldsymbol{\eta}})(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\eta}) \tag{9}$$

镇定 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 到系统原点.

证明. 记 $\tilde{\boldsymbol{a}}=\hat{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{a}$, $\tilde{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\eta}$, 则式(7)—(9)可写为

$$\dot{x}_1=\eta_1+\tilde{v}_1,\ \dot{x}_2=\eta_2+\tilde{v}_2,\ \dot{x}_j=\frac{x_1^{j-2}}{(j-2)!}(\eta_2+\tilde{v}_2)\quad(3\leqslant j\leqslant n), \tag{10a}$$

$$H_2\dot{\tilde{\boldsymbol{v}}}=\Phi(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\eta},\dot{\boldsymbol{\eta}})\tilde{\boldsymbol{a}}-C_2\tilde{\boldsymbol{v}}-K_p\tilde{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{\sigma}, \tag{10b}$$

$$\dot{\tilde{a}}=-\Gamma^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\eta},\dot{\boldsymbol{\eta}})\tilde{\boldsymbol{v}},\ \dot{w}_1=\omega w_2,\ \dot{w}_2=-\omega w_1,\ \boldsymbol{w}(0)=[0,1]^{\mathrm{T}}. \tag{10c}$$

取 $V=\frac{1}{2}[(k_1x_1+w_2\sum_{i=2}^n k_ix_i^2)^2+\sum_{i=2}^n k_ix_i^2+\tilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\Gamma\tilde{\boldsymbol{a}}+\tilde{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}H_2\tilde{\boldsymbol{v}}]$, 则 $\dot{V}=-k_1(k_1x_1+w_2\sum_{i=2}^n k_ix_i^2)^2-[\sum_{i=2}^n\frac{k_ix_1^{i-2}x_i}{(i-2)!}+2w_2(k_1x_1+w_2\sum_{i=2}^n k_ix_i^2)\sum_{i=2}^n\frac{k_ix_1^{i-2}x_i}{(i-2)!}]^2-\tilde{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{T}}K_p\tilde{\boldsymbol{v}}$. 于是 V 非增, $\boldsymbol{x}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{v}}(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{a}}(t)$ 有界. 由文[1]知式(10)的解收敛于 $\mathscr{A}=\{(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{v}},\tilde{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{w}):k_1x_1+w_2\sum_{i=2}^n k_ix_i^2=0,\ \sum_{i=2}^n\frac{k_ix_1^{i-2}x_i}{(i-2)!}=0,\tilde{\boldsymbol{v}}=0\}$ 的最大不变集中. 下面证明 $\mathscr{A}$ 的最大不变集为 $E=\{(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{v}}):x_i=0(1\leqslant i\leqslant n),\tilde{\boldsymbol{v}}=0\}$. 在 $\mathscr{A}$ 中, 式(10)的前 n 个方程为

$$\dot{x}_1=\frac{\omega}{k_1}\sum_{i=2}^n k_ix_i^2\sin\omega t,\ \dot{x}_2=0,\cdots,\dot{x}_n=0. \tag{11}$$

用反证法证明 $\sum_{i=2}^n k_ix_i^2\sin\omega t=0(\forall\ t)$. 假设不然, 则 $\sum_{i=2}^n k_ix_i^2\neq 0$; 又由 $\sum_{i=2}^n\frac{k_ix_1^{i-2}x_i}{(i-2)!}=0$ 知 $\sum_{i=2}^n k_i\frac{x_1^{i-2}x_i}{(i-2)!}\dot{x}_i+\dot{x}_1\sum_{i=3}^n\frac{k_ix_1^{i-3}x_i}{(i-3)!}=0$; 再由式(11)知 $\sum_{i=3}^n\frac{k_ix_1^{i-3}x_i}{(i-3)!}=0$. 对该式求导知 $\sum_{i=4}^n\frac{k_ix_1^{i-4}x_i}{(i-4)!}=0$. 同理可得 $\sum_{i=j}^n\frac{k_ix_1^{i-j}x_i}{(i-j)!}=0(5\leqslant j\leqslant n)$. 所以 $x_i=0(2\leqslant i\leqslant n)$, 与 $\sum_{i=2}^n k_ix_i^2\neq 0$ 矛盾. 故 $\sum_{i=2}^n k_ix_i^2\sin\omega t=0$, 所以 $x_i=0(2\leqslant i\leqslant n)$ 及 $x_1=0$, 即 E 是包含在 $\mathscr{A}$ 中的最大不变集. 因而, $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 收敛于零. 证毕.

3 仿真

考虑文[2]中例子, 沿用其记号, 系统的动力学方程及所受非完整约束为

$$m\ddot{x}=\lambda\cos\theta-\frac{1}{R}(u_1+u_2)\sin\theta,\ m\ddot{y}=\lambda\sin\theta+\frac{1}{R}(u_1+u_2)\cos\theta, \tag{12a}$$

$$I_0\ddot{\theta}=\frac{L}{R}(u_1-u_2),\quad \dot{x}\cos\theta+\dot{y}\sin\theta=0. \tag{12b}$$

由第二部分的推导过程, 式(12)可由如下方程描述[3]:

$$\dot{x}=-w_1\sin\theta,\quad \dot{y}=w_1\cos\theta,\quad \dot{\theta}=w_2,\quad m\dot{w}_1=\frac{1}{R}(u_1+u_2),\quad I_0\dot{w}_2=\frac{L}{R}(u_1-u_2).$$

取同胚变换: $x_1=-x\sin\theta+y\cos\theta$, $x_2=\theta$, $x_3=x\cos\theta+y\sin\theta$, $v_1=w_1-(x\cos\theta+y\sin\theta)w_2$, $v_2=w_2$. 上述消去约束反力后的系统方程可变成如下标准形:

$$\dot{x}_1=v_1,\quad \dot{x}_2=v_2,\quad \dot{x}_3=x_1v_2,\quad H_2(\boldsymbol{x})\dot{\boldsymbol{v}}+C_2(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{v}+G_2=B_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \tag{13}$$

其中 $H_2=\begin{bmatrix} m & mx_3 \\ mx_3 & mx_3^2+I_0\end{bmatrix}$, $C_2=\begin{bmatrix}0 & m\dot{x}_3\\ 0 & mx_3\dot{x}_3\end{bmatrix}$, $B_2=\frac{1}{R}\begin{bmatrix}1 & 1\\ x_3+L & x_3-L\end{bmatrix}$, $G_2=0$. 相

应地，$\boldsymbol{a}=[m, I_0]^{\mathrm{T}}$，$\Phi(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\xi,\dot{\xi})=\begin{bmatrix}\dot{\xi}_1+x_3\dot{\xi}_2+\dot{x}_3\xi_2 & 0\\ x_3\dot{\xi}_1+x_3^2\dot{\xi}_2+x_3\dot{x}_3\xi_2 & \xi_2\end{bmatrix}$，则控制律(8)和(9)镇定 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 到零点.

仿真中，假设 $\boldsymbol{a}=[0.5(\mathrm{kg}), 0.5(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2)]^{\mathrm{T}}$，$R=L=1(\mathrm{m})$；控制中取 $\omega=1$，$k_1=0.5$，$k_2=0.4$，$k_3=5$，$K_p=\mathrm{diag}(50,50)$，$\Gamma=\mathrm{diag}(0.1,0.1)$；$\boldsymbol{x}(0)=[-0.8(\mathrm{Rad}),-0.5(\mathrm{m}),0.4(\mathrm{m})]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v}(0)=[-0.55(\mathrm{Rad/s}),4.2(\mathrm{m/s})]^{\mathrm{T}}$，$\hat{\boldsymbol{a}}(0)=[1.5(\mathrm{kg}),0.2(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2)]^{\mathrm{T}}$. 图1给出了 x_1, x_2, x_3的响应曲线.

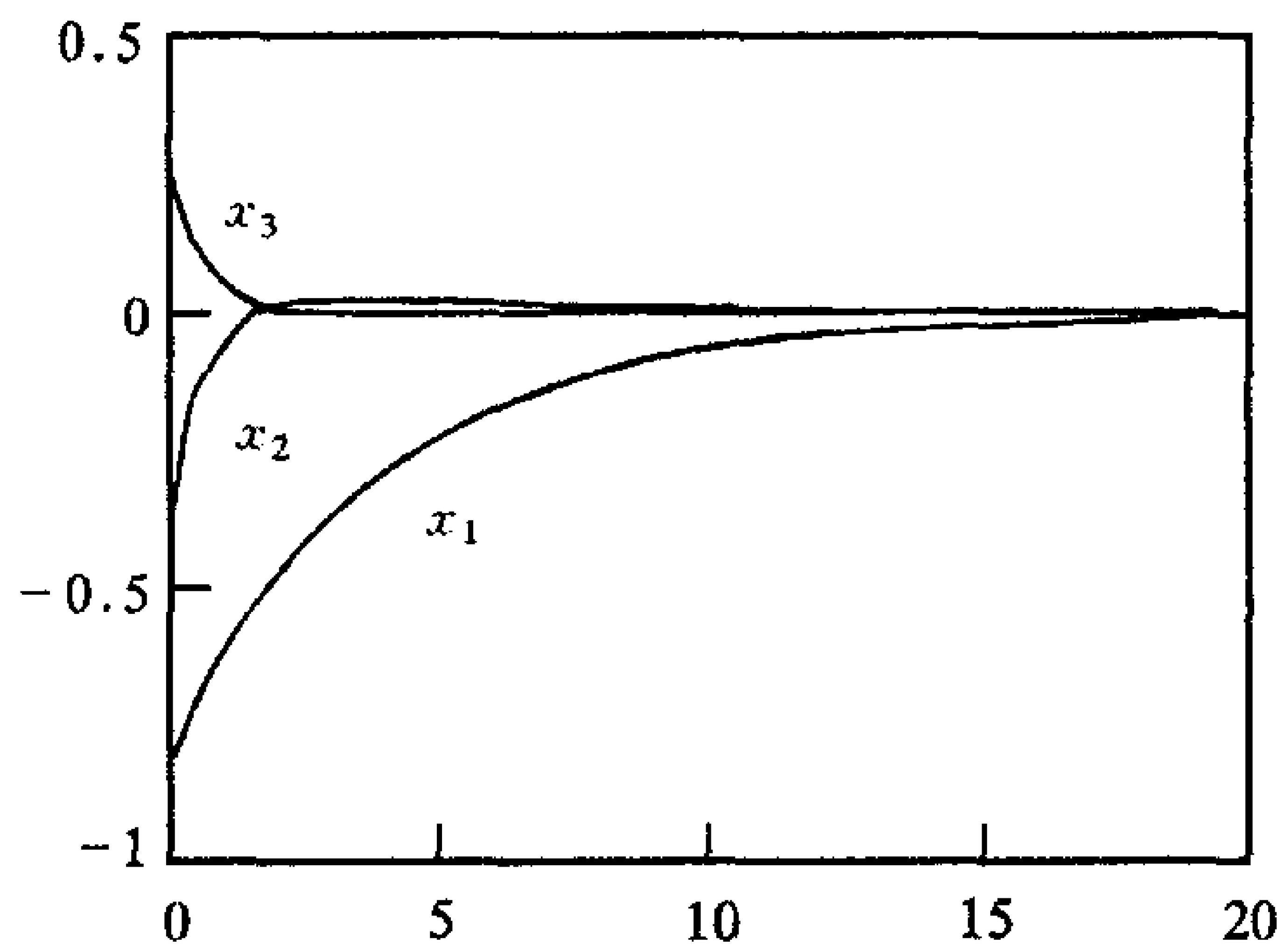

图1　x_1, x_2和 x_3的响应曲线

参 考 文 献

1 LaSalle J P. Stability theory for ordinary differential equations. *J. Differential Equations*, 1968, **4**:57—65

2 Campion G, d'Andrea Novel B, Bastin G. Controllability and state feedback stabilization of nonholonomic mechanical systems. In: Advanced Robot Control, Lect Notes control Inf. Sc. 162, 1991. 106—124

3 Dong Wenjie, Huo Wei. Adaptive stabilization of dynamic nonholonomic chained systems with uncertainty. In: Proc. of 36th IEEE Conf. on Decision and Control, Hyatt Regency San Diego, USA, 1997

董文杰　1970年12月出生，北京航空航天大学博士生. 研究领域为机器人动力学与控制、鲁棒控制、非线性系统控制等.

霍　伟　见本刊第20卷第3期.