



一种线性二次型调节器闭环稳定的充分条件及在预测控制中的应用

陈忠保

(中国科学技术大学计算机系 合肥 230027)

李嗣福

(中国科学技术大学自动化系 合肥 230027)

摘要 提出了终态松弛的线性二次型 Kleinman 调节器, 给出并证明了该调节器保证系统闭环稳定的一个充分条件. 将结果用于预测控制的稳定性分析, 得到选择代价函数中加权阵的定量准则.

关键词 线性二次型调节器, 稳定性, 预测控制, 区间后退策略.

A SUFFICIENT CONDITION FOR LQR TO STABILIZE SYSTEMS AND ITS APPLICATION TO PREDICTIVE CONTROL

CHEN Zhongbao

(Dept. of Computer University of Science & Technology of China, Hefei 230027)

LI Sifu

(Dept. of Automation, University of Science & Technology of China, Hefei 230027)

Abstract This paper proposes a free-final-state Kleinman LQR and a sufficient condition to ensure the close-loop stability with the regulator. By applying the result to the stability analysis of predictive control, a quantitative criterion is obtained to choose the weighting matrices in the cost function.

Key words LQR, stability, predictive control, receding horizon strategy.

1 引言

对于线性离散时不变系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}_k \in R^n, \mathbf{u}_k \in R^m, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times m}$. 设计常值状态反馈阵使闭环系统渐近稳定的方法很多. Kleinman 于1974年提出了一种简易的方法^[1], 其中假定: A1) (A, B) 能控; A2) A 非奇异. 考虑有限区间上的代价函数 $J_k = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{u}_{k+i}^T R \mathbf{u}_{k+i} (N \geq n)$ 在 $\mathbf{x}_{k+N} = 0$ 的约束下, 得到二次型最优解. 按区间后退 (receding horizon) 策略, 取当前时刻的控制输入 \mathbf{u}_k 施加于系统, 所形成的定常状态反馈可保证系统是闭环稳定的. Clarke 考虑预测控制的稳定性时^[2], 利用上述结果, 提出了一种定性选择代价函数中加权阵的方法: 固定输出偏差加权阵, 由控制加权阵 $R = \lambda I \rightarrow 0$ 近似实现 $\mathbf{x}_{k+N} = 0$ 的约束. 但 R 应小到何种程度才是良好的近似, 即保证闭环稳定性, 上述定性准则不能解决.

本文针对定性选择加权阵的缺陷, 在 Kleinman 调节器的基础上, 取消 $\mathbf{x}_{k+N} = 0$ 的约束, 得到一种新的终态松弛的 Kleinman 调节器, 并给出了保证系统闭环稳定的充分条件. 利用该结果分析预测控制, 推导出选择加权阵的定量准则, 以确保预测控制闭环稳定.

2 主要结果

2.1 终态松弛的 Kleinman 调节器

取代价函数

$$J = \mathbf{x}_{k+N}^T Q \mathbf{x}_{k+N} + \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{u}_{k+i}^T R \mathbf{u}_{k+i} \quad (N \geq n),$$

其中 $Q > 0, R > 0$, 且都是对称阵. 在系统(1)的约束下, 得到 $\mathbf{u}_{k+i} (i=0, 1, \dots, N-1)$ 的解为

$$\mathbf{u} = -(\bar{R} + O_B^T Q O_B)^{-1} O_B^T Q A^N \mathbf{x}_k,$$

其中 $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_k^T, \dots, \mathbf{u}_{k+N-1}^T]^T, \bar{R} = \text{diag}\{R, R, \dots, R\}, O_B = [A^{N-1}B, \dots, B]$. 利用求逆引理 $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$, 可将各时刻的控制输入展开为

$$\mathbf{u}_{k+i} = -R^{-1}B^T(A^T)^{N-1-i}W_N^{-1}[I + Q^{-1}W_N^{-1}]^{-1}A^N \mathbf{x}_k \quad (i = 0, 1, \dots, N-1),$$

其中 $W_N = O_B \bar{R}^{-1} O_B^T$, 由条件 A1) 及 $N \geq n$ 知 O_B 行满秩, 故 W_N 非奇异且正定.

采用区间后退策略, 每次只取 \mathbf{u}_k , 得到定常状态反馈

$$\mathbf{u}_k = -R^{-1}B^T(A^T)^{N-1}W_N^{-1}[I + Q^{-1}W_N^{-1}]^{-1}A^N \mathbf{x}_k \triangleq -L\mathbf{x}_k. \quad (2)$$

2.2 闭环稳定的充分条件

定理. 在条件 A1) 及 A2) 下, 对所有 $N \geq n$, 取 $Q = pW_N^{-1}, p \in (0, \infty), R$ 为任意对称正定阵, 如果

$$\frac{2\gamma - 1}{\gamma^2} > \|H^T W_N^{-1} H\|_2, \quad (3)$$

其中 $\gamma = \frac{p}{p+1}, H = A^{N-1}BR^{-\frac{1}{2}}, \|\cdot\|_2$ 表示 2 次范数, 则状态反馈(2)使闭环系统渐近稳定.

证明. 当 $Q = pW_N^{-1}$ 时, (2) 式中的反馈阵可表示为 $L = \gamma R^{-1}B^T(A^T)^{N-1}W_N^{-1}A^N$, 闭环系统矩阵为 $A_c = A - BL = A - \gamma BR^{-1}B^T(A^T)^{N-1}W_N^{-1}A^N$. 由条件 A2) 知 A^N 非奇异, 用它对 A_c 作相似变换, 有 $A_c \sim A - \gamma A^N BR^{-1}B^T(A^T)^{N-1}W_N^{-1} \triangleq \phi$. 考虑系统 $\mathbf{x}(k+1) = \phi^T \mathbf{x}(k)$ 的稳定性, 因 $W_N > 0$, 取 $\mathbf{x}^T(k)W_N \mathbf{x}(k)$ 为李亚普诺夫函数, 下面证 $\phi W_N \phi^T - W_N$ 半负定.

$$\phi W_N \phi^T - W_N = A W_N A^T + \gamma^2 A^N BR^{-1}B^T(A^T)^{N-1}W_N^{-1}A^{N-1}BR^{-1}B^T(A^T)^N -$$

$$2\gamma A^N B R^{-1} B^T (A^T)^N - W_N, \tag{4}$$

因

$$A W_N A^T = \sum_{i=1}^N A^i B R^{-1} B^T (A^T)^i = A^N B R^{-1} B^T (A^T)^N + W_N - B R^{-1} B^T, \tag{5}$$

且考虑 $H = A^{N-1} B R^{-\frac{1}{2}}$, 将(5)式代入(4)式可得

$$\phi W_N \phi^T - W_N = - A H [(2\gamma - 1)I - \gamma^2 H^T W_N^{-1} H] H^T A^T - B R^{-1} B^T. \tag{6}$$

当(3)式成立时, 对任意 n 维非零向量 x , $\gamma^2 x^T H^T W_N^{-1} H x \leq \gamma^2 \|H^T W_N^{-1} H\|_2 x^T x < (2\gamma - 1) \cdot x^T x$, 该式表明 $V = (2\gamma - 1)I - \gamma^2 H^T W_N^{-1} H$ 正定, 从而 $A H V H^T A^T \geq 0$, 又因 $B R^{-1} B^T \geq 0$, 所以 $\phi W_N \phi^T - W_N \leq 0$.

此外, 可证明由任意非零初态 $x(0)$ 所确定的轨线 $x(k)$, $x^T(k) A H V H^T A^T x(k)$ 不恒为 0; 否则有 $x^T(k) A^N B R^{-\frac{1}{2}} = 0 (\forall k \geq 0)$, 即 $x^T(0) \phi^k A^N B = 0 (\forall k \geq 0)$. 又 $\phi^k A^N = A^N A_c^k$, 取 $k = 0, 1, \dots, n-1$, 得

$$x^T(0) A^N [B, A_c B, \dots, A_c^{n-1} B] = 0.$$

该式表明闭环系统不可控, 而状态反馈不改变系统的可控性, 故开环系统也不可控, 这与条件 A1) 矛盾. 所以任意非零初态 $x(0)$ 确定的轨线不会使 $x^T(k) A H V H^T A^T x(k)$ 恒为 0, 由(6)式知 $x^T(k) [\phi W_N \phi^T - W_N] x(k)$ 也不恒为零. 根据李亚普诺夫渐近稳定定理知 ϕ^T 渐近稳定, A_c 相似于 ϕ , 所以 A_c 也渐近稳定. 证毕.

运用以上定理设计二次型调节器时, 不必求解 Ricatti 方程, 只要适当选择加权阵, 即能保证稳定性, 和原 Kleinman 调节器相比, 引入了变量 p , 扩大了设计自由度. 另外, 在分析预测控制的稳定性时, 该定理具有重要意义.

2.3 在预测控制中的应用

预测控制和采用区间后退策略的二次型控制本质上是一致的, 为了应用前述定理, 先给出 MIMO 系统的最小状态空间实现

$$x_{k+1} = A x_k + B \Delta u_k, \quad y_k = C x_k, \tag{7a), (7b)}$$

上式中 $x_k \in R^n$; $\Delta u_k = u_k - u_{k-1} \in R^m$ 是控制增量; $y_k \in R^p$; A, B, C 分别是适当维矩阵. 因稳定性与外部信号无关, 不妨令系统设定值为 0, 预测控制的代价函数取为

$$J_{pc} = y^T Q y + \Delta u^T R \Delta u, \tag{8}$$

其中 $y = [y_{k+N_1}^T, \dots, y_{k+N_2}^T]^T$, $\Delta u = [\Delta u_k^T, \dots, \Delta u_{k+N_u-1}^T]^T$, $Q \geq 0$, $R = r I_{m \times N_u} > 0$ 分别是输出偏差加权阵和控制加权阵, $[N_1, N_2]$ 是预测区间, N_u 是优化长度.

对于系统(7), (8)唯一确定了预测控制律^[4]

$$\Delta u_k = - [I_m, 0, \dots, 0] (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q O_c A^{N_1} x_k, \tag{9}$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} G_{N_1} & \cdots & G_{N_1 - N_u + 1} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{N_2} & \cdots & G_{N_2 - N_u + 1} \end{bmatrix}, \quad G_i = \begin{cases} C A^{i-1} B, & i > 0, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad O_c = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ C A^{N_2 - N_1} \end{bmatrix}.$$

推论. 当被控对象没有不稳定的模态对消, A 非奇异, 取 $N_1 = N_u \geq n$, $N_2 - N_1 \geq n - 1$, r 为任意正实数, $Q = p (O_c^T)^+ W_{N_u}^{-1} O_c^+$ (注. X^+ 表示 X 的伪逆), $p \in (0, \infty)$, 如果

$$\frac{2\gamma - 1}{\gamma^2} > \|H^T W_{N_u}^{-1} H\|_2, \tag{10}$$

其中 $\gamma = \frac{p}{p+1}$, $W_{N_u} = r^{-1} O_B O_B^T$, $O_B = [A^{N_u-1} B, \dots, B]$, $H = A^{N_u-1} B / \sqrt{r}$, 则(9)式的预测控制律使闭环系统渐近稳定.

证明. 1) 被控对象没有不稳定的模态对消, 意味着只要有不稳模态必包含在最小实现中, 所以使最小实现稳定, 整个系统即稳定. 2) 当 $N_1 = N_u$ 时, $\Delta \mathbf{u}_{k+i} = 0 (i \geq N_1)$, 利用系统方程(7)得到

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ CA^{N_2-N_1} \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k+N_1} = O_c \mathbf{x}_{k+N_1} = O_c \mathbf{x}_{k+N_u}. \quad (11)$$

将(11)式代入(8)式, 有 $J_{pc} = \mathbf{x}_{k+N_u}^T O_c^T Q O_c \mathbf{x}_{k+N_u} + \sum_{i=0}^{N_u-1} r \Delta \mathbf{u}_{k+i}^2$. 因 $N_1 = N_u \geq n$, 由前文的定理知, 只要取

$$O_c^T Q O_c = p W_{N_u}^{-1} \quad (12)$$

且 $\gamma = \frac{p}{p+1}$ 满足(10)式, 即可保证系统闭环稳定. 因 $N_2 - N_1 \geq n - 1$, 所以 O_c 列满秩, (12)式中的 Q 必有解. 当 $Q = p(O_c^T)^+ W_{N_u}^{-1} O_c^+$ 时, (12)式恒成立. 从而在推论的条件下, 预测控制律(9)使闭环系统渐近稳定. 证毕.

3 结论

文中通过改变线性二次型问题的终态约束, 推导出终态松弛的 Kleinman 调节器, 且给出了保证系统闭环稳定的充分条件. 和原调节器相比, 文中的结果为调节器设计提供了更大的自由度; 特别地, 将结论应用到预测控制的稳定性分析中, 得到了加权阵、系统参数矩阵和预测区间、优化长度之间的定量关系, 从而克服了现有定性准则不能量化的缺点.

参 考 文 献

- 1 Kleinman D L. Stabilizing a discrete, constant, linear system with application to iterative methods for solving the Riccati equation. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1974, **19**:252-254
- 2 Clarke D W, Mohtadi C. Properties of generalized predictive control. *Automatica*, 1989, **25**(6):859-875
- 3 李嗣福. 参数化模型预测空间实现及递推预测算法. *控制理论与应用*, 1993, **10**(6):650-656

陈忠保 1970年生, 1992年毕业于国防科技大学自动控制系, 1997年在中国科技大学获工学博士学位, 并留校任教. 研究方向为预测控制, 自适应控制和计算机工业应用.

李嗣福 1939年生, 1964年毕业于哈尔滨工业大学无线电系, 现为中国科技大学自动化系教授. 主要学术方向是多变量控制、预测控制和计算机控制工程.