第25卷 第3期
1999年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 25, No. 3
May, 1999

短文

应用 Diophantine 方程的多通道最优去卷[1)]

邓自立 刘伟华 石 莹
(黑龙江大学应用数学研究所 哈尔滨 150080)

摘 要 应用时域上的现代时间序列分析方法，提出了具有 ARMA 新息滤波器形式的多通道最优去卷估值器. 它要求解一个 Diophantine 方程，可处理非平稳输入信号，且可统一处理最优去卷滤波、平滑和预报问题. 仿真例子说明了其有效性.

关键词 多通道最优去卷，Diophantine 方程，ARMA 新息滤波器，现代时间序列.

MULTICHANNEL OPTIMAL DECONVOLUTION USING DIOPHANTINE EQUATIONS

DENG Zili LIU Weihua SHI Ying
(*Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Harbin* 150080)

Abstract Using the modern time series analysis method, this paper presents the multichannel optimal deconvolution estimators described by the autoregressive moving average (ARMA) innovation filter, which require the solution of a Diophantine equation. They can handle the nonstationary input signals and can handle the optimal deconvolution filtering, smoothing and prediction problems in a unified framework. A simulation example shows their usefulness.

Key words Multichannel optimal deconvolution, diophantine equation, ARMA innovation filter, modern time series.

1 引言

由系统输出估计其输入叫去卷(Deconvolution)或反卷积. 它有广泛的应用领域(例如油田地震勘探、通讯等). 考虑多通道最优去卷问题

$$y(t) = \Phi^{-1}\Psi s(t) + \eta(t), \tag{1}$$

$$s(t) = A^{-1}Cw(t), \eta(t) = P^{-1}\dot{R}v(t), \tag{2}$$

1)国家自然科学基金(69774019)资助项目.
收稿日期 1997-03-05 收修改稿日期 1998-03-14

其中输出 $y(t)\in R^m$;输入 $s(t)\in R^n$;有色噪声 $\eta(t)\in R^m$,$w(t)\in R^r$ 和 $v(t)\in R^s$ 是零均值、方差阵分别为 Q_w 和 Q_v 的独立白噪声;$\Phi,\Psi,\cdots,R$ 是单位滞后算子 $q^{-1}(q^{-1}s(t)=s(t-1))$的多项式矩阵,形如 $X=X(q^{-1})=X_0+X_1q^{-1}+\cdots+X_{n_x}q^{-n_x}$,$X_i$ 为系数阵,$n_x=\deg(X)$为阶次. 设 $\Phi_0=I_m,A_0=I_n,P_0=I_m,I_i$ 为 $i\times i$ 单位阵. 最优去卷问题是基于$(y(t+N),y(t+N-1),\cdots)$求输入 $s(t)$的最优(线性最小方差)估值器 $\hat{s}(t|t+N)$. 对 $N=0,N>0,N<0$分别称为去卷滤波器、平滑器和预报器.

2　多通道最优去卷估值器

将式(2)代入式(1),有 $Py(t)=P\Phi^{-1}\Psi A^{-1}Cw(t)+Rv(t)$,引入左素分解 $P\Phi^{-1}=\tilde{\Phi}^{-1}\tilde{P}$,带$\tilde{P}_0=I_m,\tilde{\Phi}_0=I_m$,则有

$$\tilde{\Phi}Py(t)=\tilde{P}\Psi A^{-1}Cw(t)+\tilde{\Phi}Rv(t);\tag{3}$$

引入左素分解 $\tilde{P}\Psi A^{-1}=\tilde{A}^{-1}\tilde{G}$,带 $\tilde{A}_0=I_m$,则可得 ARMA 新息模型

$$\tilde{A}\tilde{\Phi}P_y(t)=D\varepsilon(t),\tag{4}$$

其中 D 是稳定的,$D_0=I_m$,新息 $\varepsilon(t)\in R^m$ 是零均值、方差阵为 Q_ε 的白噪声,且

$$D\varepsilon(t)=\tilde{G}Cw(t)+\tilde{A}\tilde{\Phi}Rv(t).\tag{5}$$

D 和 Q_ε 可用谱分解或 Gevers 和 Wouters 算法[1]求得.

引理1[2]. 最优白噪声估值器为

$$\hat{w}(t|t+N)=Q_w\Pi_N^*Q_\varepsilon^{-1}\varepsilon(t),\quad \hat{v}(t|t+N)=Q_vF_N^*Q_\varepsilon^{-1}\varepsilon(t),\tag{6}$$

其中 Π_N^* 和 F_N^* 有形式 $X_N^*=X_0^{\mathrm{T}}+X_1^{\mathrm{T}}q+\cdots+X_N^{\mathrm{T}}q^N$, q 是单位正向算子,$q\varepsilon(t)=\varepsilon(t+1)$. 定义 $\Pi_N^*=O(N<0)$,$F_N^*=O(N<0)$,且 Π_i 和 F_i 可递推计算为

$$\Pi_i=-D_1\Pi_{i-1}-\cdots-D_{n_d}\Pi_{i-n_d}+M_i,\Pi_i=O(i<0),M_i=O(i>n_m),M=\tilde{G}C,\tag{7}$$

$$F_i=-D_1F_{i-1}-\cdots-D_{n_d}F_{i-n_d}+L_i,F_i=O(i<0),L_i=O(i>n_l),L=\tilde{A}\tilde{\Phi}R.\tag{8}$$

引理2. 最优输出预报器为

$$\hat{y}(t|t+N)=(\tilde{A}\tilde{\Phi}P)^{-1}J_N\varepsilon(t+N),\tag{9}$$

这里 J_N 由下式决定

$$D=(\tilde{A}\tilde{\Phi}P)E_N+q^NJ_N(N<0),\quad J_N=Dq^{-N}(N\geqslant 0),\tag{10}$$

其中 $\deg(E_N)=-(N+1)$, $\deg(J_N)=\max(\deg(\tilde{A}\tilde{\Phi}P)-1,n_d+N)$.

证明. 由式(4)有 $y(t)=(\tilde{A}\tilde{\Phi}P)^{-1}D\varepsilon(t)$,利用式(10)即可得式(9).

定理1. 多通道最优去卷估值器为

$$A\hat{s}(t|t+N)=K_N\varepsilon(t+N),\tag{11}$$

它是 ARMA 新息滤波器,其中

$$K_N=K_\alpha+CQ_w\Pi_N^*Q_\varepsilon^{-1}q^{-N}.\tag{12}$$

上式中 K_α 连同 K_β 和 K_γ 是如下 Diophantine 方程

$$\tilde{G}K_\alpha+\tilde{A}\tilde{P}K_\beta+\tilde{A}\tilde{\Phi}K_\gamma=[J_Nq^N-\tilde{G}CQ_w\Pi_N^*Q_\varepsilon^{-1}-\tilde{A}\tilde{\Phi}RQ_vF_N^*Q_\varepsilon^{-1}]q^{-N}\tag{13}$$

的唯一解,其中 $\deg(K_\alpha)=n_\alpha-1$, $\deg(K_\beta)=n_\varphi-1$, $\deg(K_\gamma)=n_p-1$.

证明. 式(1)和(2)有状态空间模型

$$\boldsymbol{\alpha}(t+1)=\bar{A}\boldsymbol{\alpha}(t)+\bar{C}\boldsymbol{w}(t),\ \boldsymbol{s}(t)=\tilde{H}_1\boldsymbol{\alpha}(t)+C_0\boldsymbol{w}(t), \tag{14}$$

$$\boldsymbol{\beta}(t+1)=\bar{\Phi}\boldsymbol{\beta}(t)+\bar{\Psi}\boldsymbol{s}(t),\ \boldsymbol{y}(t)=\tilde{H}_2\boldsymbol{\beta}(t)+\Psi_0\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{\eta}(t), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\gamma}(t+1)=\bar{P}\boldsymbol{\gamma}(t)+\bar{R}\boldsymbol{v}(t),\ \boldsymbol{\eta}(t)=\tilde{H}_3\boldsymbol{\gamma}(t)+R_0\boldsymbol{v}(t), \tag{16}$$

其中$(\bar{A},\bar{H}_1)$,$(\bar{\Phi},\bar{H}_2)$和$(\bar{P},\bar{H}_3)$均为块伴随形[1]. 合并式(14)−(16),有增广系统

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\bar{\Lambda}\boldsymbol{x}(t)+\bar{\Gamma}\boldsymbol{\xi}(t),\quad \boldsymbol{y}(t)=\bar{H}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\delta}(t), \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)=[\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}(t),\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}(t),\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm T}(t)]^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{\xi}(t)=[\boldsymbol{w}^{\mathrm T}(t),\boldsymbol{v}^{\mathrm T}(t)]^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{\delta}(t)=\Psi_0C_0\boldsymbol{w}(t)+R_0\boldsymbol{v}(t)$,

$$\bar{\Lambda}=\begin{bmatrix}\bar{A} & O & O\\ \bar{\Psi}\bar{H}_1 & \bar{\Phi} & O\\ O & O & \bar{P}\end{bmatrix},\quad \Gamma=\begin{bmatrix}\bar{C} & O\\ \bar{\Psi}C_0 & O\\ O & \bar{R}\end{bmatrix},\quad \bar{H}=[\Psi_0\bar{H}_1,\bar{H}_2,\bar{H}_3]. \tag{18}$$

设$(\tilde{A}\tilde{\Phi}P,\tilde{G}C,\tilde{A}\tilde{\Phi}R)$左素,可证明增广系统是完全可观、可控的,故存在稳态 Kalman 估值器

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t+1|t+1+N)=\bar{\Lambda}\hat{\boldsymbol{x}}(t|t+N)+\bar{\Gamma}\hat{\boldsymbol{\xi}}(t|t+N)+\bar{K}_N\boldsymbol{\varepsilon}(t+1+N). \tag{19}$$

置 $\bar{K}_N=[\bar{K}_\alpha^{\mathrm T},\bar{K}_\beta^{\mathrm T},\bar{K}_\gamma^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$ 和 $\bar{K}_x=[K_{x0}^{\mathrm T},\cdots,K_{xn_x}^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$,$x=\alpha,\beta,\gamma$,$K_{\alpha i}$为 $n\times m$ 阵,$K_{\beta i}$和 $K_{\gamma i}$为 $m\times m$ 阵,则子系统 Kalman 估值器为

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t+1|t+1+N)=\bar{A}\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t|t+N)+\bar{C}\hat{\boldsymbol{w}}(t|t+N)+\bar{K}_\alpha\boldsymbol{\varepsilon}(t+1+N), \tag{20}$$

$$\hat{\boldsymbol{s}}(t|t+N)=\bar{H}_1\hat{\boldsymbol{\alpha}}(t|t+N)+\bar{C}_0\hat{\boldsymbol{w}}(t|t+N), \tag{21}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(t+1|t+1+N)=\bar{\Phi}\hat{\boldsymbol{\beta}}(t|t+N)+\bar{\Psi}\hat{\boldsymbol{s}}(t|t+N)+\bar{K}_\beta\boldsymbol{\varepsilon}(t+1+N), \tag{22}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}(t|t+N)=\bar{H}_2\hat{\boldsymbol{\beta}}(t|t+N)+\bar{\Psi}_0\hat{\boldsymbol{s}}(t|t+N)+\hat{\boldsymbol{\eta}}(t|t+N), \tag{23}$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}(t+1|t+1+N)=\bar{P}\hat{\boldsymbol{\gamma}}(t|t+N)+\bar{R}\hat{\boldsymbol{v}}(t|t+N)+\bar{K}_\gamma\boldsymbol{\varepsilon}(t+1+N), \tag{24}$$

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(t|t+N)=\bar{H}_3\hat{\boldsymbol{\gamma}}(t|t+N)+R_0\hat{\boldsymbol{v}}(t|t+N). \tag{25}$$

因$(\bar{A},\bar{H}_1)$,$(\bar{\Phi},\bar{H}_2)$和$(\bar{P},\bar{H}_3)$为块伴随形,故式(20)和(21),式(22)和(23),式(24)和(25)各等价于如下 ARMA 模型[1]:

$$A\hat{\boldsymbol{s}}(t|t+N)=C\hat{\boldsymbol{w}}(t|t+N)+K_\alpha\boldsymbol{\varepsilon}(t+N), \tag{26}$$

$$\Phi\hat{\boldsymbol{y}}(t|t+N)=\Psi\hat{\boldsymbol{s}}(t|t+N)+K_\beta\boldsymbol{\varepsilon}(t+N)+\Phi\hat{\boldsymbol{\eta}}(t|t+N), \tag{27}$$

$$P\hat{\boldsymbol{\eta}}(t|t+N)=R\hat{\boldsymbol{v}}(t|t+N)+K_\gamma\boldsymbol{\varepsilon}(t+N), \tag{28}$$

其中 $K_x=K_{x0}+K_{x1}q^{-1}+\cdots+K_{xn_x}q^{-n_x}$,$x=\alpha,\beta,\gamma$,且 $n_\alpha=n_a-1$,$n_\beta=n_\varphi-1$,$n_\gamma=n_p-1$. 将式(9),(26)和(28)代入式(27),并利用式(6)和引入的左素分解,经整理后有

$$J_N\boldsymbol{\varepsilon}(t+N)=[\tilde{G}CQ_w\Pi_N^*Q_\varepsilon^{-1}q^{-N}+\tilde{G}K_\alpha+\tilde{A}\tilde{P}K_\beta+\tilde{A}\tilde{\Phi}RQ_vF_N^*Q_\varepsilon^{-1}q^{-N}+\tilde{A}\tilde{\Phi}K_\gamma]\boldsymbol{\varepsilon}(t+N), \tag{29}$$

这引出式(13). 置 $\tilde{P}K_\beta+\tilde{\Phi}K_N=K_\gamma$,则式(13)化为

$$\tilde{G}K_\alpha+\tilde{A}K_\omega=[J_Nq^N-\tilde{G}CQ_w\Pi_N^*Q_\varepsilon^{-1}-\tilde{A}\tilde{\Phi}RQ_vF_N^*Q_\varepsilon^{-1}]q^{-N}. \tag{30}$$

因$(\tilde{G},\tilde{A})$左素,$n_\alpha=n_a-1$,由文[3]知式(30)有唯一解(K_α,K_ω). 因$(\tilde{P},\tilde{\Phi})$左素,$n_\beta=n_\varphi-1$,由文[3]$\tilde{P}K_\beta+\tilde{\Phi}K_r=K_\omega$ 有唯一解(K_β,K_γ). 故式(13)有唯一解$(K_\alpha,K_\beta,K_\gamma)$.

推论1. K_α 由 Diophantine 方程(30)唯一决定.

显然,由式(30)求 K_α 要比由式(13)求 K_α 简单.

注意,$\boldsymbol{\varepsilon}(t)$可由式(4)置新息初值后递推计算[2],而式(11)的计算与新息初值和 $\hat{\boldsymbol{s}}(t|t+N)$的初值两者有关. 若 A 稳定,易知式(11)关于这两种初值是渐近稳定的,因而其初

值可任意选取.若 A 不稳定,则应由文[2]给出的非递推最优状态估值器 $\hat{x}(t|t+N)$ 求最优初值 $\hat{s}(t|t+N)$,才能保证式(11)关于新息初值是渐近稳定的.

3　仿真例子

考虑二通道非平稳输入 $s(t)$ 的最优去卷问题(1)和(2),其中 $\Phi=I_2+\Phi_1q^{-1}$,$\Psi=I_2q^{-1}$,$P=I_2+P_1q^{-1}$,$R=I_2$,$A=I_2+A_1q^{-1}$,$C=C_1q^{-1}$,$Q_w=\mathrm{diag}(1,1)$,$Q_v=\mathrm{diag}(2,2)$,$A_1=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & -0.15\end{bmatrix}$, $C_1=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2.5 & 1\end{bmatrix}$,$\Phi_1=\begin{bmatrix}-0.8 & 0\\ -0.9 & -0.5\end{bmatrix}$,$P_1=\begin{bmatrix}0.85 & 0\\ 0 & -0.4\end{bmatrix}$,且 $s(t)=[s_1(t),s_2(t)]^{\mathrm{T}}$.对 $N=-1$,用本文方法仿真结果如图1和图2所示.

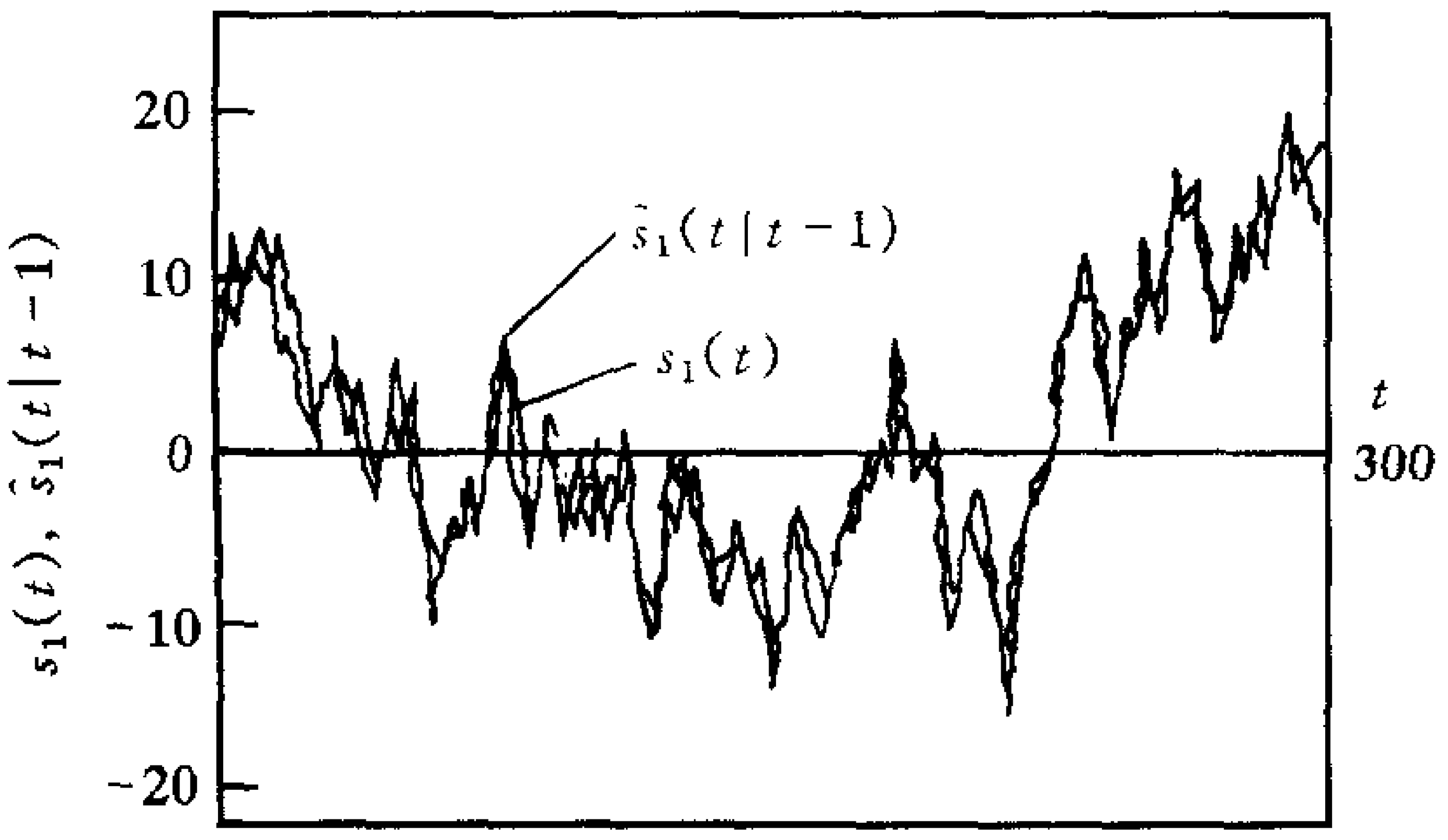

图1　$s_1(t)$和最优去卷预报器 $\hat{s}_1(t|t-1)$

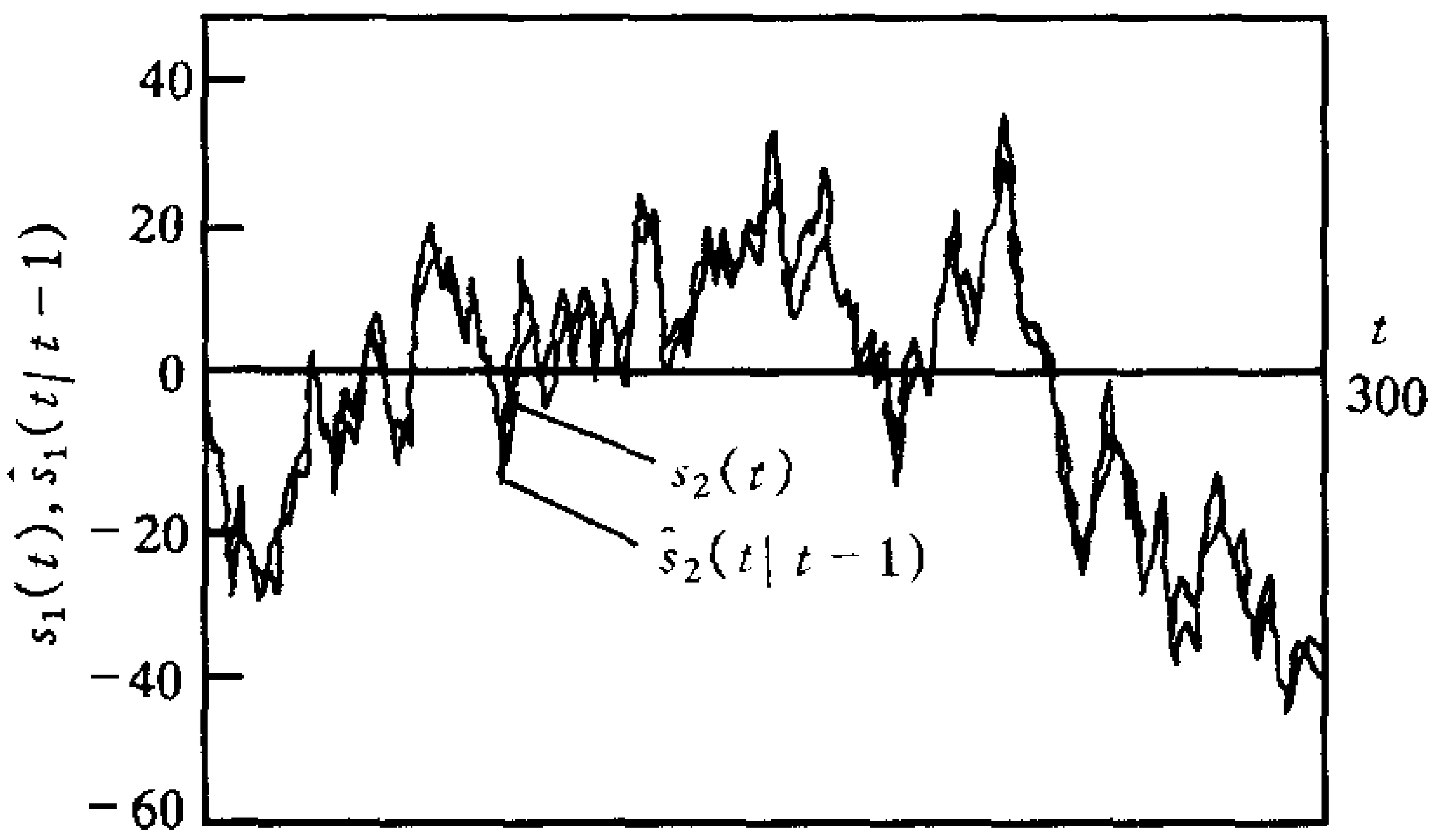

图2　$s_2(t)$和最优去卷预报器 $\hat{s}_2(t|t-1)$

参　考　文　献

1　邓自立,郭一新.现代时间序列分析及其应用.北京:知识出版社,1989

2　Deng Zili *et al*. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems. *Automatica*, 1996, **32**(2):199—216

3　Feinstein J, Bar-Ness Y. The solution of the matrix polynomial equation $A(s)X(s)+B(s)y(s)=C(s)$. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1984, **29**:(1):75—77

邓自立　1938年生,1962年毕业于黑龙江大学数学系,现为黑龙江大学应用数学研究所教授.主要研究领域为状态估计、最优滤波、信号处理、反卷积等.发表论文150余篇.

刘伟华　1971年生,1994年毕业于哈尔滨师范大学数学系,1997年获自动控制理论及应用专业硕士学位.主要研究领域为最优滤波、反卷积.

石　莹　1971年生,1993年毕业于黑龙江大学系统科学系,1996年获自动控制理论及应用专业硕士学位.主要研究领域为状态估计、反卷积.