第25卷 第3期
1999年5月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 25, No. 3
May, 1999

短文

非线性时变系统开闭环P型迭代学习控制的收敛性[1)]

皮道映 孙优贤
（浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027）

摘 要 对于非线性时变系统，给出了其开闭环P型迭代学习控制收敛的充要条件. 这些收敛条件与被控系统状态方程的具体形式无关. 对比表明，该文的结论改进了现有结果.

关键词 收敛性，迭代学习控制，非线性时变系统，开闭环P型学习.

THE CONVERGENCE OF ITERATIVE LEARNING CONTROL WITH OPEN-CLOSED-LOOP P-TYPE SCHEME FOR NONLINEAR TIME-VARYING SYSTEMS

PI Daoying SUN Youxian
(*Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract This paper gives the sufficient and necessary conditions for the convergence of open-closed-loop P-type iterative learning control of nonlinear time-varying systems. The conditions are independent of the concrete form of state equation describing the controlled systems and are weaker than the known results.

Key words Convergence, iterative learning control, nonlinear time-varying system, open-closed loop P-type.

1 引言

收敛性是学习控制研究的重要问题之一，本文研究采用开闭环P型学习律时迭代学习控制的收敛性问题. 考虑如下具有重复运动性质的非线性时变系统

---

1)国家自然科学基金(69874035)资助课题.
收稿日期 1996-04-23 收修改稿日期 1996-10-23

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_k(t) = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_k(t),\boldsymbol{u}_k(t)), \\ \boldsymbol{y}_k(t) = \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}_k(t)) + D(t)\boldsymbol{u}_k(t).\end{cases} \tag{1}$$

开闭环 P 型迭代学习控制律为

$$\boldsymbol{u}_{k+1}(t) = \boldsymbol{u}_k(t) + L_o(t)\boldsymbol{e}_k(t) + L_c(t)\boldsymbol{e}_{k+1}(t). \tag{2}$$

上式中 $t\in[0,T]$；k 表示迭代次数；$\boldsymbol{x}_k(t)\in R^{n\times 1}$；$\boldsymbol{y}_k(t)\in R^{m\times 1}$；$\boldsymbol{u}_k(t)\in R^{r\times 1}$；$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},D$ 为适当维数的向量和矩阵；$L_o(t),L_c(t)\in R^{r\times m}$ 为开、闭环学习系数矩阵；$\boldsymbol{e}_k(t)=\boldsymbol{y}_d(t)-\boldsymbol{y}_k(t)$ 为跟踪误差，$\boldsymbol{y}_d(t)$ 为期望输出；$D,L_o(t),L_c(t)$ 有界. 本文将给出该学习控制律收敛的充要条件.

2 开闭环 P 型迭代学习控制律的收敛性

定理. 设由式(1)描述的非线性系统在 $t\in[0,T]$ 上满足

1) $\forall\ t,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 有 $\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u}_1)-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{u}_2)\|\leqslant M(\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|+\|\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2\|)$；

2) $\forall\ t,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$ 有 $\|\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}_2)\|\leqslant M\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|$；

3) 存在唯一的理想控制 $\boldsymbol{u}_d(t)$，使系统的状态和输出为期望值 $x_d(t),y_d(t)$；

4) 初始状态序列 $\{\boldsymbol{x}_k(0)\}_{k\geqslant 1}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k(0)=\boldsymbol{x}_d(0)$；

5) 矩阵 $[I+L_c(t)D(t)]$ 的逆存在(I 为适当维数的单位阵).

上式中 M 为正常数. 若采用开闭环 P 型迭代学习控制律，则对于任给的初始控制 $\boldsymbol{u}_0(t)$，由式(1)和(2)得到的 $\{\boldsymbol{x}_k(t)\},\{\boldsymbol{y}_k(t)\},\{\boldsymbol{u}_k(t)\}$ 在 $[0,T]$ 上一致收敛到 $\boldsymbol{x}_d(t),\boldsymbol{y}_d(t),\boldsymbol{u}_d(t)$ 的充分条件为

$$\forall\ t\in[0,T],\quad \rho([I+L_c(t)D(t)]^{-1}[I-L_o(t)D(t)])<1. \tag{3}$$

将条件4)改为 $\boldsymbol{x}_k(0)=\boldsymbol{x}_d(0)\ (\forall\ k\geqslant 1)$，可得收敛的必要条件为

$$\rho([I+L_c(0)D(0)]^{-1}[I-L_o(0)D(0)])<1. \tag{4}$$

证明. 令

$$\begin{cases}\delta\boldsymbol{x}_k(t) = \boldsymbol{x}_d(t) - \boldsymbol{x}_k(t), \\ \delta\boldsymbol{y}_k(t) = \boldsymbol{y}_d(t) - \boldsymbol{y}_k(t), \\ \delta\boldsymbol{u}_k(t) = \boldsymbol{u}_d(t) - \boldsymbol{u}_k(t).\end{cases} \tag{5}$$

定义[1]

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_1(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_d(t),\boldsymbol{u}_d(t)) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_d(t)-\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_d(t)-\boldsymbol{u}), \\ \boldsymbol{g}_1(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}_d(t)) - \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}_d(t)-\boldsymbol{x}),\end{cases} \tag{6}$$

则由式(1),(2),(5),(6)可得

$$\begin{cases}\delta\dot{\boldsymbol{x}}_k(t) = \boldsymbol{f}_1(t,\delta\boldsymbol{x}_k(t),\delta\boldsymbol{u}_k(t)), \\ \delta\boldsymbol{x}_k(0) = \boldsymbol{x}_d(0) - \boldsymbol{x}_k(0), \\ \delta\boldsymbol{y}_k(t) = \boldsymbol{g}_1(t,\delta\boldsymbol{x}_k(t)) + D(t)\delta\boldsymbol{u}_k(t), \\ \delta\boldsymbol{u}_{k+1}(t) = \delta\boldsymbol{u}_k(t) - L_o(t)D(t)\delta\boldsymbol{u}_k(t) - L_o(t)\boldsymbol{g}_1(t,\delta\boldsymbol{x}_k(t)) - \\ \qquad L_c(t)D(t)\delta\boldsymbol{u}_{k+1}(t) - L_c(t)\boldsymbol{g}_1(t,\delta\boldsymbol{x}_{k+1}(t)).\end{cases} \tag{7}$$

由式(7)和条件5)可得

$$\delta\boldsymbol{u}_{k+1}(t) + [I+L_c(t)D(t)]^{-1}L_c(t)\boldsymbol{g}_1(t,\delta\boldsymbol{x}_{k+1}(t)) =$$

$$[I+L_c(t)D(t)]^{-1}[I-L_o(t)D(t)]\delta \boldsymbol{u}_k(t)-[I+L_c(t)D(t)]^{-1}L_o(t)\boldsymbol{g}_1(t,\delta \boldsymbol{x}_k(t)). \tag{8}$$

定义算子 $G_k:C_r[0,T]\rightarrow C_r[0,T]$ 为 $G_k(\boldsymbol{u})(t)=\boldsymbol{g}_1(t,\boldsymbol{x}(t))$，其中 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}_1(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)), \\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_d(0)-\boldsymbol{x}_k(0). \end{cases} \tag{9}$$

可以验证 G_k 满足文[1]引理中算子 Q 的条件. 定义算子 $Q_{k+1},P_k:C_r[0,T]\rightarrow C_r[0,T]$ 分别为 $Q_{k+1}(\boldsymbol{u})(t)=[I+L_c(t)D(t)]^{-1}L_c(t)G_{k+1}(\boldsymbol{u})(t)$，　$P_k(\boldsymbol{u})(t)=-[I+L_c(t)D(t)]^{-1}L_o(t)G_k(\boldsymbol{u})(t)$，则 Q_{k+1},P_k 也满足文[1]引理中算子 Q 的条件，即存在 M_Q,M_P 使得

$$\|Q_{k+1}(\delta \boldsymbol{u}_{k+1})(t)\|\leqslant M_Q(\|\delta \boldsymbol{x}_{k+1}(0)\|+\int_0^t\|\delta \boldsymbol{u}_{k+1}(s)\|\mathrm{d}s), \tag{10}$$

$$\|P_k(\delta \boldsymbol{u}_k)(t)\|\leqslant M_p(\|\delta \boldsymbol{x}_k(0)\|+\int_0^t\|\delta \boldsymbol{u}_k(s)\|\mathrm{d}s). \tag{11}$$

定义算子 $S,V_k:C_r[0,T]\rightarrow C_r[0,T]$ 分别为 $S(u)(t)=[I+L_c(t)D(t)]^{-1}[I-L_o(t)D(t)]\cdot \boldsymbol{u}(t)$，$V_k(\boldsymbol{u})(t)=(S+P_k)(\boldsymbol{u})(t)$，则式(8)可写成

$$\delta \boldsymbol{u}_{k+1}(t)+Q_{k+1}(\delta \boldsymbol{u}_{k+1})(t)=V_k(\delta \boldsymbol{u}_k)(t). \tag{12}$$

由式(11)及算子 S 和 V_k 的定义可以推出

$$\int_0^t\|V_k(\delta \boldsymbol{u}_k)(s)\|\mathrm{d}s\leqslant M_V(\|\delta \boldsymbol{x}_k(0)\|+\int_0^t\|\delta \boldsymbol{u}_k(s)\|\mathrm{d}s), \tag{13}$$

其中 $M_V=\sup\limits_{s\in[0,T]}\|(I+L_c(s)D(s))^{-1}(I-L_o(s)D(s))\|+M_PT$. 根据文[1]的引理，定义算子 $\overline{Q}_{k+1}:C_r[0,T]\rightarrow C_r[0,T]$ 为 $\overline{Q}_{k+1}(\boldsymbol{y})(t)=Q_{k+1}(\boldsymbol{u})(t)$，$\forall\ \boldsymbol{y}(t)\in C_r[0,T]$，其中 $\boldsymbol{u}(t)$ 由 $\boldsymbol{u}(t)+Q_{k+1}(\boldsymbol{u})(t)=\boldsymbol{y}(t)$ 唯一确定. 再对照式(12)可知，算子 $\overline{Q}_{k+1}$ 使得 $Q_{k+1}(\delta \boldsymbol{u}_{k+1})(t)$ 可用 $V_k(\delta \boldsymbol{u}_k)(t)$ 表示. 定义算子 $W_{k+1}:C_r[0,T]\rightarrow C_r[0,T]$ 为 $W_{k+1}(\boldsymbol{u})(t)=-\overline{Q}_{k+1}(V_k(\boldsymbol{u}))(t)$，则式(12)变为

$$\delta \boldsymbol{u}_{k+1}(t)=V_k(\delta \boldsymbol{u}_k)(t)+W_{k+1}(\delta \boldsymbol{u}_k)(t)=(S+P_k+W_{k+1})(\delta \boldsymbol{u}_k)(t). \tag{14}$$

由式(10)、算子 $\overline{Q}_{k+1}$ 的定义和文[1]引理的结论 b)可知，存在 $M_{\overline{Q}}>0$ 使得

$$\|\overline{Q}_{k+1}(V_k(\delta \boldsymbol{u}_k))(t)\|\leqslant M_{\overline{Q}}(\|\delta \boldsymbol{x}_{k+1}(0)\|+\int_0^t\|V_k(\delta \boldsymbol{u}_k)(s)\|\mathrm{d}s). \tag{15}$$

由式(13)，(15)及算子 W_{k+1} 的定义可得

$$\|W_{k+1}(\delta \boldsymbol{u}_k)(t)\|\leqslant M_{\overline{Q}}\max(M_V,1)(\|\delta \boldsymbol{x}_k(0)\|+\|\delta \boldsymbol{x}_{k+1}(0)\|+\int_0^t\|\delta \boldsymbol{u}_k(s)\|\mathrm{d}s). \tag{16}$$

定义算子 $U_k:C_r[0,T]\rightarrow C_r[0,T]$ 为 $U_k(\boldsymbol{u})(t)=(P_k+W_{k+1})(\boldsymbol{u})(t)$，由式(11)与(16)得

$$\begin{aligned}\|U_k(\delta \boldsymbol{u}_k)(t)\|&\leqslant\|P_k(\delta \boldsymbol{u}_k)(t)\|+\|W_{k+1}(\delta \boldsymbol{u}_k)(t)\|\leqslant \\ &\max(1,M_P+M_{\overline{Q}}\max(M_V,1))(\|\delta \boldsymbol{x}_k(0)\|+\|\delta \boldsymbol{x}_{k+1}(0)\|+\int_0^t\|\delta \boldsymbol{u}_k(s)\|\mathrm{d}s),\end{aligned} \tag{17}$$

式(14)变为

$$\delta \boldsymbol{u}_{k+1}(t)=(S+U_k)(\delta \boldsymbol{u}_k)(t)=(S+U_k)(S+U_{k+1})\cdots(S+U_0)(\delta \boldsymbol{u}_0)(t). \tag{18}$$

由文[3]引理4和式(17)，(18)，条件4)及算子 S 的定义可知，若式(3)成立，则 $\lim\limits_{k\rightarrow\infty}\delta \boldsymbol{u}_{k+1}(t)=0$ 在 $[0,T]$ 上一致地成立. 充分性得证.

再用反证法证必要性. 因 $\boldsymbol{x}_d(0)=\boldsymbol{x}_k(0)(\forall\ k\geqslant 1)$，由式(17)可知，$\|U_k(\delta \boldsymbol{u}_k)(0)\|\leqslant 0$，即 $U_k(\delta \boldsymbol{u}_k)(0)=0$. 由式(18)和算子 S 的定义可知

$$\delta u_{k+1}(0) = ([I + L_c(0)D(0)]^{-1}[I - L_o(0)D(0)])^{k+1}\delta u_0(0). \tag{19}$$

因此，若式(4)不成立，则∃ $u_0(t)\in C_r[0,T]$使得 $\delta u_{k+1}(0)$不趋于零. 必要性得证. 证毕.

3 结 论

1)对于非线性系统开环 P 型学习控制，文[2]的高阶方法蜕化成一阶后其收敛充分条件为$\|I-L_o(t)D(t)\|<1$，本文为 $\rho(I-L_o(t)D(t))<1$. 由于矩阵的谱半径小于其任何范数，故本文的收敛充分条件更弱；

2)对于非线性系统闭环 P 型学习控制，文[1]的定理给出了收敛的充要条件，不难看出，该定理为本文定理的特例；

3)由式(3)和(4)可以看出，收敛条件与状态方程中函数 $f(t,x,u)$的具体形式无关.

致谢 本文工作得到本所程储旺博士的大力帮助，特此致谢.

参 考 文 献

1 林辉，王林. 非线性系统闭环 P 型迭代学习控制的收敛性. 控制理论与应用，1995，**12**(6)：742—746

2 Bien Z，Huh K M. High-order iterative learning control algorithm. In：Proc. IEE.，1989，**136**(3)：105—112

3 林辉，王林，戴冠中. 迭代学习控制中的初始状态问题. 见：第一届全球华人智能控制与智能自动化大会论文集. 北京：科学出版社，1993，2269—2273

皮道映 1965年生. 1985年和1988年分别获得东北大学计算机应用专业学士学位和硕士学位，1995年获浙江大学工业自动化专业博士学位，1996年任副教授. 研究领域为多模型控制、学习控制等，已发表学术论文20多篇.

孙优贤 简介见本刊第24卷第1期.