研究简报

LURIE 控制系统绝对稳定的时滞相关条件

年晓红
（湘潭工学院信息与电气工程系 湘潭 411201）

关键词 Lurie 控制系统，时滞，绝对稳定性，时滞相关稳定性.

DELAY DEPENDENT CONDITIONS FOR ABSOLUTE STABILITY OF LURIE TYPE CONTROL SYSTEMS

NIAN Xiaohong
(*Department of Electrical and Computer Engineering, Xiangtan Polytechnic University, Xiangtan* 411201)

Key words Lurie control system, time-delay, absolute stability, delay-dependent stability

1 引言

Lurie 型控制系统是一类非常重要的控制系统，关于具有时滞的 Lurie 型控制系统的绝对稳定性的讨论已有不少结果[1-4]，但已有的绝对稳定性条件均与时滞无关，这类结论对系数矩阵的限制比较严格，在某些情况下比较保守. 本文将讨论具有一个时滞和多个时滞的 Lurie 型控制系统的绝对稳定性，给出系统绝对稳定的时滞相关稳定条件.

2 主要结论及证明

考虑具有时滞的 Lurie 控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{x}(t-\tau)+\boldsymbol{b}f(\sigma(t)), \tag{1a}$$

$$\sigma(t)=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t). \tag{1b}$$

这里 $\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots\cdots x_n(t))^{\mathrm{T}}\in R^n$ 为实向量函数，$A,B\in R^{n\times n}$为实矩阵，$A+B$ 为渐近稳定矩阵，向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in R^n$，$\tau>0$为常数，

$$f(\sigma)\in K[0,k]=\{f(\sigma)\,|\,f(0)=0,\quad 0<\sigma f(\sigma)\leqslant k\sigma^2(\sigma\neq 0)\}.$$

文中约定：对于任意矩阵 A，$\|A\|=\sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}$，对于任意向量 γ，$\|\gamma\|=\sqrt{\gamma^{\mathrm{T}}\gamma}$.

收稿日期 1997-08-04 收到修改稿日期 1999-01-12

由于 $A+B$ 渐近稳定,故对于任给正定矩阵 Q,存在唯一正定矩阵 P,满足矩阵方程

$$(A+B)^{\mathrm{T}}P+P(A+B)=-Q. \tag{2}$$

定理1. 若时滞 τ 满足条件

$$\tau<\frac{\lambda_{\min}(Q)-k^2\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2-\|P\|^2}{3\|PB\|^2+\alpha^2(\|A\|^2+\|B\|^2+k^2\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2)}, \tag{3}$$

则系统(1)绝对稳定(这里 $\alpha=\sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\geqslant 1$).

证. 系统(1a)可化为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(A+B)x(t)-B\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s+\boldsymbol{b}f(\sigma(t)), \tag{4}$$

将(1a)代入(4)可得

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(A+B)\boldsymbol{x}(t)-B\int_{t-\tau}^{t}[Ax(s)+B\boldsymbol{x}(s-\tau)+\boldsymbol{b}f(\sigma(s))]\mathrm{d}s+\boldsymbol{b}f(\sigma(t)). \tag{5}$$

取 Lyapunov 函数 $V(x(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t)$,则

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)}=&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t)+2[\boldsymbol{b}f(\sigma(t))]^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t)-2\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PBA\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s-\\&2\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PBB\boldsymbol{x}(s-\tau)\mathrm{d}s-2\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PB\boldsymbol{b}f(\sigma(s))\mathrm{d}s\leqslant\\&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}f^2(\sigma(t))+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P^2\boldsymbol{x}(t)+\\&\tau\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(PB)^{\mathrm{T}}(PB)\boldsymbol{x}(t)+\tau\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\xi_1)A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}(\xi_1)+\\&\tau\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(PB)^{\mathrm{T}}(PB)\boldsymbol{x}(t)+\tau\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\xi_2)B^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x}(\xi_2)+\\&\tau\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(PB)^{\mathrm{T}}(PB)\boldsymbol{x}(t)+\tau\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}f^2(\sigma(\xi_3)).\end{aligned}$$

这时 $t-\tau<\xi_1$, $\xi_3<t$, $t-2\tau<\xi_2<t-\tau$,应用 Razumikhin 方法,假定 $V(\boldsymbol{x}(t+\theta))\leqslant q^2V(\boldsymbol{x}(t))(q>1,\theta\in[-2\tau,0])$,则 $\|\boldsymbol{x}(t+\theta)\|\leqslant q\alpha\|\boldsymbol{x}(t)\|$.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)}\leqslant&-\lambda_{\min}(Q)\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+k^2\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+\|P\|^2\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+\\&3\tau\|PB\|^2\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+\tau q^2\alpha^2(\|A\|^2+\|B\|^2)\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+\tau k^2q^2\alpha^2\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2\|\boldsymbol{x}(t)\|^2=\\&-[\lambda_{\min}(Q)-k^2\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2-\|P\|^2]\|\boldsymbol{x}(t)\|^2+\\&\tau[3\|PB\|^2+q^2\alpha^2(\|A\|^2+\|B\|^2+k^2\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2)]=-w\|x(t)\|^2\end{aligned}$$

这里 $w=\lambda_{\min}(Q)-k^2\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2-\|P\|^2-\tau[3\|PB\|^2+q^2\alpha^2(\|A\|^2+\|B\|^2+k^2\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2)]$,若定理条件成立,则必存在充分接近于1的实数 $q>1$,使得 $w>0$[5]. 由文献[4]中的定理4.2(pp.177)可知系统(1)绝对稳定. 定理证毕.

考虑如下具有多个时滞的 Lurie 型控制系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+\sum\limits_{i=1}^{m}B_i\boldsymbol{x}(t-\tau_i)+\boldsymbol{b}f(\sigma(t)), & (6\mathrm{a})\\ \sigma(t)=c^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t). & (6\mathrm{b})\end{cases}$$

这里 $A,B_i(i=1,2,\cdots,m)\in R^{n\times n}$;$A+\sum\limits_{i=1}^{m}B_i$ 为渐近稳定矩阵;向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in R^n$;$\tau_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为常数,$0<\tau_i\leqslant\tau$;　$f(\sigma)\in K[0,k]$.

类似于定理1我们可推出下面的定理.

定理2. 若时滞 τ 满足条件

$$\tau<\frac{\lambda_{\min}(Q)-k^2\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2-\|P\|^2}{3\sum_{i=1}^{m}\|PB_i\|^2+m\alpha^2(\|A\|^2+\sum_{i=1}^{m}\|B_i\|^2+k^2\|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{c}\|^2)},\tag{7}$$

则系统(1)绝对稳定. 这里 P,Q 均为正定矩阵且满足

$$(A+\sum_{i=1}^{m}B_i)^{\mathrm{T}}P+P(A+\sum_{i=1}^{m}B_i)=-Q.$$

3 例子

考虑系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.2 & -0.5\\ 0.5 & -0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t-\tau)\\ x_2(t-\tau)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.2\\ -0.3\end{bmatrix}f(\sigma(t)),$$

$$\sigma(t)=0.6x_1(t)+0.8x_2(t),f(\cdot)\in K[0,0.5],$$

取 $P=I$,则 $\alpha=1,Q=\begin{pmatrix}-4.2 & -1\\ -1 & -4.2\end{pmatrix}$,$\lambda_{\min}(Q)=3.4$. 由定理1可知该系统绝对稳定的条件为 $\tau<0.3053$.

致谢 本文作者特别感谢审稿者对本文提出了宝贵的修改意见. 同时还要感谢山东大学数学与系统科学院阎醒民教授多年来对作者的支持和指导.

参 考 文 献

1 Popov V M, Halanay A. About stability of nonlinear controlled systems with delay. *Automat & Remote Control*, 1962, **23**(7): 849—851

2 Somolines A. Stability of Lurie-type functional equations. *J Diff. Eqs.*, 1977, **26**(2): 191—199

3 年晓红. 具有时滞的 Lurie 型控制系统的绝对稳定性. 西北师范大学学报, 1997, **33**(1): 9—14

4 Hale J. Theory of Functional Differential Equation. New York: Springer-Verlag, 1977

5 Su T J, Huang C G. Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1992, **37**(10): 1656—1659

年晓红 1965年生,1985年毕业于西北师范大学数学系,1992年在山东大学获硕士学位,现为湘潭工学院副教授,主要研究方向为控制理论及应用. 近年来发表学术论文30余篇.