第25卷　第4期　　自 动 化 学 报　　Vol. 25, No. 4
1999年7月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jul., 1999

短文

广义不确定系统稳定鲁棒控制[1)]

贾新春　　胡桂荣
（山西大学数学系　太原　030006）

摘　要　利用李雅普诺夫稳定理论和矩阵范数性质研究了广义不确定系统的稳定鲁棒控制问题. 在不同情况下，分别给出了保证闭环不确定系统渐进稳定的两类稳定鲁棒控制：状态反馈、正常动态补偿器的设计方法，得到了鲁棒稳定控制的不确定量的范数界，而且提出了在多个稳定鲁棒控制器中寻找具有最大的不确定量范数界的控制器的方案.

关键词　广义不确定系统，稳定鲁棒控制.

STABLE ROBUST CONTROL OF GENERALIZED UNCERTAIN SYSTEMS

JIA Xinchun　　HU Guirong
(*Dept. of Mathematics. Shanxi University, Taiyuan*　030006)

Abstract　In this paper, the stable robust control problem of generalized uncertain systems is studied by employing Lyapunov stable theory and matrix norm properties. For different cases, design methods of two kinds of stable robust controller (state feedback, normal dynamical compensator) are given, which ensure asymptotic stability of the closed loop uncertain system. Meanwhile, the norm bounds of system uncertainties of finding the best controller that has the maximal uncertainties norm bound among several stable robust controllers are put forward.

Key words　Generalized uncertain systems, stable robust control.

1　引言

广义不确定系统有两个重要的控制任务，一个是稳定鲁棒控制，另一个是脉冲鲁棒控制. 文献[1]用代数方法研究了一类广义不确定系统的状态反馈式的稳定鲁棒控制，文献[2]研究了广义不确定系统的脉冲鲁棒控制，条件稍强.

1)国家自然科学基金(69674011和69805004)及山西省青年科学基金资助项目.
收稿日期　1997-08-01　收到修改稿日期　1999-03-19

本文考虑下述广义不确定系统

$$E\dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu, \tag{1}$$

$$y = Cx. \tag{2}$$

这里 $x\in R^n$,$u\in R^m$,$y\in R^p$ 分别为系统(1)的状态,控制,输出向量;E,A,B,C 为相应维数的常阵. E 为奇异阵,$\mathrm{rank}E=n_1<n$,(E,A)为正则矩阵束,即 $\det(sE-A)\neq 0,s\in C$,ΔA 为系统(1)的不确定量,具有结构 $\Delta A\in U_\alpha=\{F:\|F\|_2<\alpha,\alpha>0\}$.

当 $\Delta A\equiv 0$时,称(1)为理想系统,即

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3}$$

$$y = Cx. \tag{4}$$

我们的问题是:当理想系统满足什么条件时,广义不确定系统(1)有稳定鲁棒控制.

引理1[3]. 设 $F\in R^{n\times n}$,若$\|F\|_2<r$,则$(rI_n\pm F)$是非奇异阵;进一步,若 F 是对称阵,则$(rI_n\pm F)$为正定对称阵.

引理2[4]. 设理想系统(3)脉冲能控和 R-能控,则存在状态反馈 $u=Kx$,使得闭环系统

$$E\dot{x} = (A + BK)x \tag{5}$$

无脉冲且渐近稳定,并且可以任意配置系统(3)的 n_1个有限极点.

2　状态反馈式稳定鲁棒控制

当系统(1)的状态能直接量测时,我们考虑系统(1)在状态反馈下的稳定鲁棒控制. 当系统(3)脉冲能控,R-能控时,由引理3知,存在状态反馈 $u=Kx$,使得理想闭环系统(5)既无脉冲又渐近稳定. 对系统(5)作受限制等价变换,得

$$\dot{x} = A_1x_1, \tag{6}$$

$$0 = x_2, \tag{7}$$

其中 $x=Q\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$,　$x_1\in R^{n_1}$,　$P,Q\in R^{n\times n}$为非奇异阵,

$$P(sE-A)Q = \begin{pmatrix} sI_{n_1}-A & 0\\ 0 & -I_{n-n_1}\end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix},\quad Q=(Q_1,Q_2),\quad P_1\in R^{n_1\times n},\quad Q_1\in R^{n\times n_1}; \tag{8}$$

则相应地,系统(1)在控制 $u=Kx$ 作用下,其闭环系统受限制等价于

$$\dot{x}_1 = (A_1 + \Delta A_{11})x_1 + \Delta A_{12}x_2, \tag{9}$$

$$0 = \Delta A_{21}x_1 + (I_{n-n_1} + \Delta A_{22})x_2, \tag{10}$$

这里 $\Delta A_{ij}=P_i\Delta AQ_j$, $i,j=1,2$. 易证下面引理.

引理3. 当 $\alpha<(\|P_2\|_2\cdot\|Q_2\|_2)^{-1}$时,系统(9),(10)对任意的 $\Delta A\in U_\alpha$ 无脉冲行为.

由于 $\sigma(A_1)\subset C^-$,则记 M 为下述李雅普诺夫方程的唯一正定对称解

$$A_1^{\mathrm{T}}M + MA_1 = -2I_{n_1}. \tag{11}$$

定理1. 设理想系统(3)脉冲能控,R-能控,则当不确定参数的范数界 $\alpha<\alpha^*$,$\alpha^*=$

$(\lambda_{\max}(M)\|P_1\|_2\cdot\|Q_1\|_2+\|P_2\|_2\cdot\|Q_2\|_2)^{-1}$时，反馈 $\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$ 是系统(1)的稳定鲁棒控制.

证明. 由定理条件及引理3易知$(I_{n-n_1}+\Delta A_{22})$非奇异，系统(9)，(10)受限制等价于

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1=(A_1+\overline{\Delta}\,\overline{A})\boldsymbol{x}_1, \tag{12}$$

$$0=\bar{\boldsymbol{x}}_2, \tag{13}$$

其中 $\overline{\Delta}\,\overline{A}=\Delta A_{11}-\Delta A_{12}(I-\Delta A_{22})^{-1}\Delta A_{21}$. 因此，只需证明系统(12)对任意的 $\Delta A\in U_\alpha$ 都是渐近稳定即可.

$$\begin{aligned}\|\overline{\Delta}\,\overline{A}\|_2 &=\|\Delta A_{11}-\Delta A_{12}(I-\Delta A_{22})^{-1}\Delta A_{21}\|_2\leqslant\\ &\|\Delta A_{11}\|_2+\|\Delta A_{12}\|_2\cdot\|(I-\Delta A_{22})^{-1}\|_2\cdot\|\Delta A_{21}\|_2\leqslant\\ &\|P_1\Delta AQ_1\|_2+\|P_1\Delta AQ_2\|_2\frac{1}{1-\|\Delta A_{22}\|_2}\|P_2\Delta AQ_1\|_2\leqslant\\ &\alpha\|P_1\|_2\cdot\|Q_1\|_2+\frac{\alpha^2\|P_1\|_2\cdot\|Q_2\|_2\cdot\|P_2\|_2\cdot\|Q_1\|_2}{1-\alpha\|P_2\|_2\cdot\|Q_2\|_2}=\\ &\frac{\alpha\|P_1\|_2\cdot\|Q_1\|_2}{1-\alpha\|P_2\|_2\cdot\|Q_2\|_2}.\end{aligned}$$

取李雅普诺夫函数 $V=\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{x}_1$，显然 V 为正定函数，将 V 沿系统(12)的轨迹对 t 求导得

$$\begin{aligned}\dot{V}=&\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(A_1^{\mathrm{T}}M+MA_1+\overline{\Delta}\,\overline{A}^{\mathrm{T}}M+M\overline{\Delta}\,\overline{A})\boldsymbol{x}_1\leqslant\\ &\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(-2I_{n_1}+2\lambda_{\max}(M)\|\overline{\Delta}\,\overline{A}\|_2I_{n_1})\boldsymbol{x}_1=-2(1-\lambda_{\max}(M)\|\overline{\Delta}\,\overline{A}\|_2)\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1.\end{aligned}$$

由 $\alpha<\alpha^*$ 及上述两式得 $\lambda_{\max}(M)\|\overline{\Delta}\,\overline{A}\|_2<1$，所以 $\dot{V}\leqslant 0$. 根据李雅普诺夫稳定理论知系统(12)对任意的 $\Delta A\in U_\alpha$ 都是渐近稳定，即 $\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$ 是系统(1)的稳定鲁棒控制. 证毕.

注1. 定理1的条件“理想系统 R-能控”可减弱为“理想系统能稳”，证明过程一样，再者，不确定量的范数界 α^* 与所用的状态反馈的增益阵 K 有关，这在很大程度上反映了既能镇定又能消除脉冲的状态反馈应用于不确定系统时有多大的可靠性.

状态反馈式稳定鲁棒控制的不确定量的范数界的确定步骤如下：

1)若理想系统(3)是脉冲能控，R-能控，则按引理2设计出状态反馈 $\boldsymbol{u}=K\boldsymbol{x}$；

2)对系统(5)作受限制等价变换(8)，得 A_1,P_1,P_2,Q_1,Q_2；

3)求解李雅普诺夫方程(11)，得正定对称解 M；

4)计算 $\alpha^*=(\lambda_{\max}(M)\|P_1\|_2\cdot\|Q_1\|_2+\|P_2\|_2\cdot\|Q_2\|_2)^{-1}$；

5)通过比较不同的形如(5)的 r 个稳定状态反馈 $\boldsymbol{u}=K_i\boldsymbol{x}_i$，对应的 r 个鲁棒范数界 α_i^*，$i=1,2,\cdots,r$，可得到对应于 $\alpha_{i_0}^*=\max\{\alpha_i^*;i=1,2,\cdots,r\}$的那个状态反馈 $\boldsymbol{u}=K_{i_0}\boldsymbol{x}$，其抗参数摄动的能力在$\{\boldsymbol{u}=K_i\boldsymbol{x},i=1,2,\cdots,r\}$中最好.

3 动态补偿器式稳定鲁棒控制

当系统(1)的状态不能直接量测时，此时有必要设计系统的动态补偿器.

设理想系统(3)无脉冲，则广义不确定系统(1)，(2)受限制等价于

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1=(A_1+\Delta A_{11})\boldsymbol{x}_1+\Delta A_{12}\boldsymbol{x}_2+B_1\boldsymbol{u}, \tag{14}$$

$$0=\Delta A_{21}\boldsymbol{x}_1+(I_{n-n_1}+\Delta A_{22})\boldsymbol{x}_2+B_2\boldsymbol{u}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{y}=C_1\boldsymbol{x}_1+C_2\boldsymbol{x}_2, \tag{16}$$

其中 $x=Q\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(Q_1\quad Q_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，$Q_1\in R^{n\times n_1}$，$P,Q\in R^{n\times n}$为非奇异阵，$P=\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}$，

$$\begin{pmatrix}P & 0\\0 & I_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}sE-A-\Delta A & B\\C & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & I_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sI_{n_1}-A_1-\Delta A_{11} & -\Delta A_{12} & B_1\\-\Delta A_{21} & -\Delta A_{22} & B_2\\C_1 & C_2 & 0\end{pmatrix}\tag{17}$$

当理想系统(3)，(4)能稳，能检测时，则有(A_1,B_1)是能稳对，(A_1,C_1)是能检测对，因此存在 $K_0\in R^{m\times n_1}$，$G_0\in R^{n_1\times p}$，使得 $\sigma(A_1-B_1K_0)\subset C^-$，$\sigma(A-G_0C_1)\subset C^-$.

由引理3，当 $\alpha<(\|P_2\|_2\cdot\|Q_2\|_2)^{-1}$时，系统(14)—(16)无脉冲，且$(I_{n-n_1}-\Delta A_{22})$非奇异，此时系统(14)—(16)受限制等价于

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=(A_1+\Delta A_{11}-\Delta A_{12}(I+\Delta A_{22})^{-1}\Delta A_{21})x_1+\\&\quad(B_1-\Delta A_{12}(I+\Delta A_{22})^{-1}B_2)u,\end{aligned}\tag{18}$$

$$0=(I+\Delta A_{22})^{-1}\Delta A_{21}x_1+x_2+(I+\Delta A_{22})^{-1}B_2u,\tag{19}$$

$$y=C_1x_1+C_2x_2(=y_1+y_2).\tag{20}$$

显然，上述系统能镇定等价于系统(18)能镇定. 因此对(18)设计动态补偿器

$$\dot{x}_c=(A_1-G_0C_1)x_c+B_1u+G_0y_1,\tag{21}$$

$$u=-K_0x_c,\ x_c\in R^{n_1},\tag{22}$$

则相应的闭环系统为

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_c\end{pmatrix}=A^*\begin{pmatrix}x_1\\x_c\end{pmatrix}+\Delta A^*\begin{pmatrix}x_1\\x_C\end{pmatrix},\tag{23}$$

其中
$$A^*=\begin{pmatrix}A_1 & -B_1K_0\\G_0C_1 & A_1-G_0C_1-B_1K_0\end{pmatrix},$$

$$\Delta A^*=\begin{pmatrix}\Delta A_{11}-\Delta A_{12}(I+\Delta A_{22})^{-1}\Delta A_{21} & \Delta A_{21}(I+\Delta A_{22})^{-1}B_2K_0\\0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\sigma(A^*)=\sigma(A_1-B_1K_0)\cup\sigma(A_1-G_0C_1)\subset C^-.\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\|\Delta A^*\|_2&\leqslant\|\Delta A_{11}-\Delta A_{12}(I+\Delta A_{22})^{-1}\Delta A_{21}\|_2+\|\Delta A_{21}(I+\Delta A_{22})^{-1}B_2K_0\|_2\leqslant\\&\frac{\alpha\|P_1\|_2\cdot\|Q_1\|_2}{1-\alpha\|P_2\|_2\cdot\|Q_2\|_2}+\frac{\alpha\|P_2\|_2\cdot\|Q_1\|_2\cdot\|B_2\|_2\cdot\|K_0\|_2}{1-\alpha\|P_2\|_2\cdot\|Q_2\|_2}=\\&\frac{\alpha(\|P_1\|_2\cdot\|Q_1\|_2+\|P_2\|_2\cdot\|Q_1\|_2\cdot\|B_2\|_2\cdot\|K_0\|_2)}{1-\alpha\|P_2\|_2\cdot\|Q_2\|_2}.\end{aligned}\tag{25}$$

设 $\overline{M}\in R^{2n_1\times 2n_1}$是方程 $A^{*T}\overline{M}+\overline{M}A^*=-2I_{2n_1}$的正定对称解.

定理2. 设理想系统(3)，(4)无脉冲，能稳能检测，当 K_0，G_0及不确定界 α^* 取为

$$\sigma(A_1-B_1K_0)\cup\sigma(A_1-G_0C_1)\subset C^-,$$

$\alpha<\alpha^*=(\|P_2\|_2\cdot\|Q_2\|_2+\lambda_{\max}(\overline{M})\|P_1\|_2\cdot\|Q_1\|_2+\|P_2\|_2\cdot\|Q_1\|_2\cdot\|B_2\|_2\cdot\|K_0\|_2)^{-1}$时，则降阶正常动态补偿器(21)，(22)是广义不确定系统(1)，(2)的稳定鲁棒控制.

证明. 取李雅普诺夫函数 $V=(x_1^T,x_c^T)\overline{M}\begin{pmatrix}x_1\\x_c\end{pmatrix}$，则

$$\dot{V}=(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_c^{\mathrm{T}})(A^{*\mathrm{T}}\overline{M}+\overline{M}A^{*}+\Delta A^{*\mathrm{T}}\overline{M}+\overline{M}\Delta A^{*})\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_c\end{pmatrix}\leqslant$$

$$(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_c^{\mathrm{T}})(-2I_{2n_1}+2\lambda_{\max}(\overline{M})\cdot\|\Delta A^{*}\|_2\cdot I_{2n_1})\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_c\end{pmatrix}.$$

由(25)及 $\alpha<\alpha^*$ 易得 $\lambda_{\max}(\overline{M})\|\Delta A^*\|_2<1$，再由引理1知：$I_{2n_2}-\lambda_{\max}(\overline{M})\|\Delta A^*\|_2 I_{2n_1}$ 为正定对称阵，因此 $V\leqslant 0$. 根据李雅普诺夫稳定理论，系统(23)对任意给定的 $\Delta A\in U_\alpha$ 都是无脉冲，渐近稳定. 证毕.

注2. 根据定理2，通过设计多个降价正常动态补偿器，找出其中对应参数摄动的范数界最大的那个动态补偿器，则可增加鲁棒控制的范围.

参 考 文 献

1 王朝珠，戴立意，贾新春. 一类广义不确定线性系统稳定控制. 控制理论与应用，1990，**7**(2)：18—25

2 贾新春. 广义系统的两个不确定型的脉冲控制. 自动化学报，1994，**20**(3)：366—370

3 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京：科学出版社，1984. 259—260

4 Dai L. Singular Control Systems. Berlin：Spring-Verla Heideberg. 1989

贾新春 1964年生. 1988年获得中科院系统科学研究所理学硕士. 现为山西大学数学系副教授. 研究兴趣为广义系统、鲁棒控制、智能信息处理等.

胡桂荣 1965年生. 1991年获得兰州大学理学硕士. 现为山西大学数学系讲师. 研究兴趣为鲁棒控制、智能信息处理等.