第25卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 25, No. 4
1999年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jul., 1999

短文

具输入饱和因子的广义系统的镇定[1)]

梁家荣
(广西大学计算机科学系 南宁 530004)
徐宝民 刘永清
(华南理工大学自动控制工程系 广州 510641)

摘 要 广义系统的镇定问题是广义系统理论的基本问题之一. 为了研究具输入饱和因子的广义系统的镇定，首先利用代数方法，借助大系统分解原理，对具输入饱和因子的广义系统进行综合，给出闭环系统渐近稳定的判别条件. 其次，给出了闭环系统 E-渐近稳定的概念，利用广义 Lyapunov 函数方法，研究具输入饱和因子的广义系统，提出了合适的反馈控制，得到了具输入饱和因子的广义系统 E-渐近稳定的判别定理.

关键词 广义系统，状态反馈，镇定，输入饱和因子，渐近稳定性，E-渐近稳定性.

STABILIZATION OF SINGULAR SYSTEMS WITH INPUT SATURATING ACTUATORS

LIANG Jiarong
(*Department of Computer, Guangxi University, Nanning* 530004)
XU Baomin LIU Yongqing
(*Department of Automation, South China University of Technology, Guangzhou* 510641)

Abstract The stabilization problem of singular systems is one of the fundamental problems in singular system theory. In order to study the stabilization of singular system with saturating actautors, first of all, the decomposing theory of large-scale system and algebra method are employed to synthesize the singular systems with saturating actautors, and a sufficient condition for asymptotic stability of closed-loop systems is given; secondly, the concept of E-asymptotic stability is given and Lyaponov's method is employed to put forward the feedback control for the singular systems with saturating actuators. A theorem for E-asymptotic stability of closed-loop system is obtained.

1)广西教育厅自然科学发展基金资助项目.
收稿日期 1997-10-13 收到修改稿日期 1998-11-29

Key words　Singular systems, state feedback, stabilization, input saturating actuators, asymptotic stability, E-asymptotic stability.

1　引言

在广义控制系统的设计中,广义线性系统理论已得到了广泛的研究[1].事实上,几乎所有的实际控制系统,都有非线性部件或部件中含有非线性因子,一般的非线性因子之一就是饱和因子,在这种情况下,不考虑其输入饱和性而设计控制,其闭环系统的渐近稳定性是得不到保证的.在正常系统中具输入饱和因子的镇定问题已有不少成果[2-4],但广义系统中带输入饱和因子的镇定问题研究结果还较少.本文考虑具输入饱和因子的广义系统的镇定问题,第一部分,通过设计合适的反馈控制使闭环系统渐近稳定.第二部分利用李雅普诺夫方法处理广义系统,设计反馈律,保证其闭环系统 E-渐近稳定.

2　闭环系统的渐近稳定性

考虑如下的广义系统

$$\begin{cases} E\dot{x} = Ax + B\mathrm{sat}u, \\ y = Cx + D\mathrm{sat}u. \end{cases} \tag{1}$$

上式中 $E,A\in R^{n\times n}$,$\det E=0$,$x\in R^n$ 是状态;$u\in R^m$ 是输入控制;$y\in R^l$;

$$\mathrm{sat}u = [\mathrm{sat}u_1,\mathrm{sat}u_2,\cdots,\mathrm{sat}u_m]^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

定义1.

$$\mathrm{sat}u_i = \begin{cases} u_i^-, u_i < u_i^- \\ u_i, u_i^- \leqslant u_i \leqslant u_i^+. \\ u_i^+, u_i > u_i^+ \end{cases}$$

对于系统(1)作如下的假设:1)(E,A,B)是强能控的.2)(E,A)是正则的.3)$\mathrm{rank}B=m$,$\mathrm{rank}C=l$,$\mathrm{degdet}(sE-A)=r$.容易证明:必存在可逆矩阵 P,Q 使得系统(1)受限等价于

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \frac{1}{2}B_1u + B_1(\mathrm{sat}u - \frac{1}{2}u), \tag{3}$$

$$0 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \frac{1}{2}B_2u + B_2(\mathrm{sat}u - \frac{1}{2}u), \tag{4}$$

$$y = CQ^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + D\mathrm{sat}u. \tag{5}$$

由系统(1)的强能控知,(1)必为脉冲能控的,因而(A_{22},B_2)是行满秩的.容易证明必存在矩阵 F_2使 $\hat{A}_{22}=(A_{22}+\frac{1}{2}B_2F_2)$可逆.这样取 $u=F_2x_2+v$,由式(3)和(4)可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_0x_1 + \frac{1}{2}B_0v + B_0(\mathrm{sat}u - \frac{u}{2}), \\ 0 &= A_{21}x_1 + \hat{A}_{22}x_2 + \frac{1}{2}B_2v + B_2(\mathrm{sat}u - \frac{u}{2}), \end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$A_0 = A_{11} - (A_{12} + \frac{1}{2}B_1F_2)\hat{A}_{22}^{-1}A_{21},\ B_0 = \frac{1}{2}[B_1 - (A_{12} + \frac{1}{2}B_1F_2)\hat{A}_{22}^{-1}B_2].$$

由(E,A,B)强能控知，(A_0,B_0)是能控的，从而可任意配置极点，取 $v=-F_1x_1$，则

$$u = F_2x_2 - F_1x_1. \tag{7}$$

这样(6)，(7)的闭环系统为

$$\dot{x}_1 = (A_0 - \frac{1}{2}B_0F_1)x_1 + B_0(\mathrm{sat}u - \frac{u}{2}), \tag{8}$$

$$0 = (A_{21} - \frac{1}{2}B_2F_1)x_1 + \hat{A}_{22}x_2 + B_2(\mathrm{sat}u - \frac{u}{2}). \tag{9}$$

系统(8)对应的齐次系统的基解矩阵为

$$\Phi(t) = e^{(A_0-\frac{1}{2}B_0F_1)t},$$

从而系统(8)的解可表示为

$$x_1(t) = \Phi(t)x_1(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)B_1(\mathrm{sat}u(\tau) - \frac{1}{2}u(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

这样可选择 F_1，使得

$$\|\Phi(t)\| \leqslant k_1e^{-\alpha_1t},\ k_1,\ \alpha_1 > 0, \tag{10}$$

$$-\alpha_1 = \max Re\{\lambda_i(A_0 - \frac{1}{2}B_0F_1)\}. \tag{11}$$

此外有

$$\|\mathrm{sat}u - \frac{1}{2}u\| \leqslant \frac{1}{2}\|u\|, \tag{12}$$

记 $F=(-F_1,F_2)$，这样得到下面的定理.

定理1. 若所选取的状态反馈 $u=-F_1x_1+F_2x_2$能满足

1)(10)，(11)式成立；

2)$\beta_1=\|F\|\|B_2\|\|\hat{A}_{22}^{-1}\|<2$；

3)$\alpha_1>\frac{1}{2}\|B\|\|F\|\dfrac{\|\hat{A}_{22}^{-1}(A_{21}-B_2F_1)\|}{1-\frac{1}{2}\|F\|\|B_2\|\|\hat{A}_{22}^{-1}\|}=\alpha_2$，则闭环系统(6)和(7)是渐近稳定的.

证明. 由式(8)的解得

$$\|x_1(t)\|\leqslant\|\Phi(t)\|\|x_1(0)\|+\frac{1}{2}\int_0^t\|\Phi(t-\tau)\|B_0\|\|F\|(\|x_1(\tau)\|+\|(x_2(\tau)\|)\mathrm{d}\tau,$$

再注意到(9)式，有

$$\|x_2\| \leqslant \frac{\|\hat{A}_{22}^{-1}(A_{21} - \frac{1}{2}B_2F_1)\| + \frac{\beta_1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\beta_1}\|x_1\|, \tag{13}$$

所以

$$\|x_1\| \leqslant k_1e^{-\alpha_1t}\|x_1(0)\| + \alpha_2\int_0^t e^{-\alpha_1(t-\tau)}\|x_1(\tau)\|\mathrm{d}\tau,$$

故$\|x_1(t)\|e^{-\alpha_1t}\leqslant k_1\|x_1(0)\|+\alpha_2\int_0^t e^{\alpha_1\tau}\|x_1(\tau)\|\mathrm{d}\tau$ 由文[5]可得

$$\|x_1(t)\|e^{\alpha_1t} \leqslant k_1\|x_1(0)\|e^{\alpha_2t},$$

即$\|x_1(t)\|\leqslant k_1\|x_1(0)\|e^{-(\alpha_1-\alpha_2)t}$由定理1的条件知，当 $t\to\infty$时，$x_1(t)\to 0$. 再由(9)可得 $t\to$

∞时,$x_2(t)\to 0$定理证毕.

3 闭环系统的 E-渐近稳定性

考虑一般的广义非线性系统

$$E\dot{x} = f(t,x), \tag{14}$$

其中 $E\in R^{n\times n}$,$x\in R^n$,$f:R^1\times R^n\to R^n$,$\det E=0$. 下面我们假设系统(14)满足相容的初始条件的解存在且唯一.

定义2. 称广义系统(14)为 E-稳定的,如果对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当$\|Ex_0\|<\delta$ 时,恒有$\|Ex(t)\|<\varepsilon$,其中 $x(t)$是满足初始条件 $Ex(0)=Ex_0$的解.

定义3. 称(14)是 E-渐近稳定的,如果1)(14)是 E-稳定的,2)且 $\lim\limits_{t\to\infty}Ex=0$.

引理1. 若存在这样一个函数 $V(t,y):R^+\times R^n\to R^+$,$y=Ex$,连续且满足如下条件

1)$V(t,0)=0$;

2)$a(\|Ex\|)\leqslant V(t,Ex)$, 其中 $a(r)$是连续递增的正函数,$a(0)=0$;

3)$\left.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(14)}\leqslant -C(V(t,Ex))$,其中 $C(V)$是关于 V 的连续的递增的正函数,且 $C(0)=0$,则(14)的零解是 E-渐近稳定的.

证明.(略)

考虑广义系统(1)的参照系统

$$E\dot{x} = Ax + Bu. \tag{15}$$

引理2[7]. 如果广义系统(15)是 R-能稳的,且无脉冲膜式,则当取 $u=-\dfrac{1}{2}R^{-1}B^{\mathrm{T}}VEx$ 时,闭环系统 $E\dot{x}=(A-\dfrac{1}{2}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}VE)x$ 在标称点 $P(A-\dfrac{1}{2}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}VE)$处是结构稳定的,这里 V 为正定阵.

于是由文献[8]知存在正定阵 W,使得

$$E^{\mathrm{T}}VA + A^{\mathrm{T}}VE - E^{\mathrm{T}}VBR^{-1}B^{\mathrm{T}}VE = -E^{\mathrm{T}}WE.$$

定理2. 假设系统(1)的参照系统(15)是 R-能稳的,且无脉冲模式,若

$$\lambda_{\min}(W) > \|VB\|^2\|R^{-1}\|,$$

则系统(1)在控制 $u=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}VEx$ 的作用下,所得的闭环系统是 E-渐近稳定的.

证明. 令 $u=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}VEx$,$u$ 与(1)所构成的闭环系统为

$$E\dot{x} = (A - \frac{1}{2}BR^{-1}B^{\mathrm{T}}VE)x + B(\mathrm{sat}u - \frac{u}{2}), \tag{16}$$

取(16)的广义李雅普诺夫函数 $V(t,Ex)=(Ex)^{\mathrm{T}}V(Ex)$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(16)} = -(Ex)^{\mathrm{T}}WEx+2(Ex)^{\mathrm{T}}VB(\mathrm{sat}u-\frac{u}{2})\leqslant -\frac{(\lambda_{\min}(W)-\|VB\|^2\|R^{-1}\|)}{\lambda_{\max}(V)}V^2$$

令 $a(r)=\lambda_{\min}(V)r^2$,$C(V)=\dfrac{(\lambda_{\min}(W)-\|VB\|^2\|R^{-1}\|)}{\lambda_{\max}(V)}V^2$容易检验引理1的条件得到满足,从而可知闭环系统(16)是 E-渐近稳定的.

4 例子

考虑如下具输入饱和因子的广义系统

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\dot{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&6&-1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\mathrm{sat}u,\\ y=Cx+D\mathrm{sat}u.\end{cases}\tag{17}$$

容易验证(E,A,B)是强能控的，(E,A)是正则的，取

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix};$$

取状态反馈$u=-(4\quad -1)x_1+2x_2$，容易求得

$$\hat{A}_{22}=7,\ A_0=\begin{bmatrix}\frac{3}{7}&\frac{1}{7}\\-\frac{4}{7}&\frac{1}{7}\end{bmatrix},\ B_0=(\frac{3}{7}\quad -\frac{1}{14})^{\mathrm{T}},\quad \beta=\frac{\sqrt{21}}{7},\ \alpha_2=0;$$

因此定理1的条件得到满足，故(17)的闭环系统是渐近稳定的.

参 考 文 献

1 Dai L Y. Singular Control Systems. Spring Velag, 1989

2 Nicalescu S I, Dion J M. Dugard L. Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturation actuators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **41**(5): 742—747

3 Chen B S, Wang S S. The design of feedback controller with nonlinear saturation actuator: Time domain approach. in proc. conf. Decision. Control, Athens. Greece, 1986: 2048—2053

4 Chen B S, Wang S S. The stability of feedback control with nonliear saturating actuator: Time domain approach. *IEEE Trans Autom. Control*. 1988, **33**(5): 483—487

5 E. Hille. Lectures on Ordinary Differential Equatons. Reading, MA: Addison-Wasley, 1969

6 刘永清，温香彩. 广义系统的变结构控制. 广州：华南理工大学出版社，1997

7 张庆灵. 广义交联系统的鲁棒分散控制. 控制与决策，1995，**10**(1)：70—74

8 张庆灵. 广义系统结构稳定性判别的李雅普诺夫方法. 系统科学与数学，1994，**14**(2)：117—120

梁家荣 男，1966年生，1987年毕业于华中师范大学数学系. 1994年在西北大学获硕士学位，1998年4月在华南理工大学自动控制工程系获博士学位，现为广西大学计算机科学系副教授. 主要感兴趣的研究为广义系统的周期解和广义系统的控制问题.

徐宝民 男，1967年生，1998年在华南理工大学自动控制系获博士学位. 现在广州市电讯局，高级工程师. 主要感兴趣的研究：广义系统，系统工程和计算机制造系统.

刘永清 男，1931年生，华南理工大学自动控制系教授，博士生导师. 主要研究领域：复杂系统与系统工程.