第25卷 第4期
1999年7月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 25, No. 4
Jul., 1999

短文

时变时滞不确定系统的鲁棒输出反馈控制[1)]

苏宏业　王景成　周 凯　褚 健
(浙江大学工业控制技术研究所 杭州 310027)

摘 要 研究了时变时滞不确定系统基于状态观测器的动态输出反馈实现鲁棒镇定的分析和综合问题. 所研究的系统不仅同时包含时变状态时滞和时变控制时滞，而且包含时变未知且有界不确定参数. 提出了确保该系统可通过输出反馈鲁棒镇定的充分条件，并将该充分条件转化为线性矩阵不等式(LMI)问题，最终通过求解两个 LMI 来构造输出反馈控制律.

关键词 不确定线性时滞系统，时变时滞，动态输出反馈，二次镇定，线性矩阵不等式(LMI).

ROBUST OUTPUT FEEDBACK CONTROL FOR LINEAR TIME-VARYING UNCERTAIN TIME-DELAY SYSTEMS

SU Hongye　WANG Jingcheng　ZHOU Kai　CHU Jian
(*Institute of Industrial Process Control, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract This paper is focused on the problem of robust stabilizing of a class of uncertain linear time-delay systems via observer-based dynamic output feedback control law when the full states can not be measured. Systems under consideration are linear systems with time-varying states and control delays, and also contain time-varying unknown-but-bounded uncertain parameters. A sufficient condition for the robust output feedback stabilizability of the system is derived. The sufficient condition is transformed into a Linear Matrix Inequality (LMI) problem and the control law can be constructed by solving two LMIs.

Key words Uncertain linear time-delay systems, time-varying delay, dynamic output feedback, quadratic stabilization, linear matrix inequality(LMI).

1 引言

利用 Riccati 方程方法解决不确定线性时滞系统的鲁棒镇定问题已得到了广泛研究

1) 国家自然科学基金青年基金资助项目(69604006).
收稿日期 1997-03-28 收到修改稿日期 1999-02-05

并取得了大量的研究结果[1-3]. 近年来,不确定线性时滞系统的输出反馈鲁棒镇定问题亦得到了一定的研究,如文献[4]给出采用静态输出反馈控制律处理具有耦合参数不确定性的不确定时滞系统的鲁棒镇定问题. 文献[5]采用动态输出反馈控制律处理一类不确定时滞系统的鲁棒镇定问题,该系统的不确定性是秩1型的,并且要求满足匹配条件. 本文将针对具有时变状态时滞和时变控制时滞的不确定线性时滞系统,基于 Riccati 方程方法推导得到了鲁棒输出反馈控制器存在的充分条件,并且可通过求解两个线性矩阵不等式(LMI)构造出动态输出反馈控制器观测增益阵和反馈增益阵. 该方法具有不必调节和选择参数的优点[6],并且容易进行数值计算[7].

2 系统描述和定义

考虑如下的不确定线性时变时滞系统

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A+\Delta A(t))x(t) + (A_1+\Delta A_1(t))x(t-d(t)) \\ &\quad + (B+\Delta B(t))u(t) + (B_1+\Delta B_1(t))u(t-h(t)), \\ y(t) &= (C+\Delta C(t))x(t), \\ x(t) &= \varphi(t), t\in[-\tau 0], \tau=\max\{d^*,h^*\}\end{aligned} \tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$ 是状态向量,$\boldsymbol{u}(t)\in\boldsymbol{R}^m$ 是控制输入向量,$\boldsymbol{y}(t)\in\boldsymbol{R}^r$ 是观测输出向量,A,A_1,B,B_1,C 是具有适当维数的已知实值常数矩阵,假设(A,B)可镇定,(A,C)可检测,$\Delta A(\cdot),\Delta A_1(\cdot),\Delta B(\cdot),\Delta B_1(\cdot),\Delta C(\cdot)$是其元素均为时间 t 的连续函数的实值时变矩阵,它们体现了系统的时变不确定性,$d(t)$和 $h(t)$分别是代表系统状态时滞和系统控制时滞的非负时变有界函数,假设对于任意时刻 t 存在正数 d^*,h^*,ρ_d 和 ρ_h 满足下述条件:

$$0\leqslant d(t)\leqslant d^*<\infty \qquad \dot{d}(t)\leqslant\rho_d<1,$$
$$0\leqslant h(t)\leqslant h^*<\infty \qquad \dot{h}(t)\leqslant\rho_h<1,$$

$\varphi(t)\in C^n[-\tau\quad 0]$是其元素均为时间 t 的连续函数的实值向量,表示系统的状态向量初值函数.

假设参数不确定性具有如下的范数有界形式

$$\begin{aligned}&\Delta A(t)=H_0F(t)E_0, \quad \Delta A_1(t)=H_1F(t)E_1, \\ &\Delta B(t)=M_0F(t)N_0, \quad \Delta B_1(t)=M_1F(t)N_1, \Delta C(t)=H_2F(t)E_2,\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $H_0,H_1,M_0,M_1\in\boldsymbol{R}^{n\times s}$;$E_0,E_1,E_2\in\boldsymbol{R}^{q\times n}$;$N_0,N_1\in\boldsymbol{R}^{q\times m}$,$H_2\in\boldsymbol{R}^{r\times s}$是已知实值常数矩阵,$F(t)\in\boldsymbol{R}^{s\times q}$是满足下述不等式约束的未知函数矩阵

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I, \tag{3}$$

本文将考虑设计下述的线性动态输出反馈控制律

$$\boldsymbol{u}(t)=-K\hat{\boldsymbol{x}}(t), \tag{4}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=A\hat{\boldsymbol{x}}(t)+B\boldsymbol{u}(t)+L(\boldsymbol{y}(t)-C\hat{\boldsymbol{x}}(t)), \tag{5}$$

其中 $\hat{x}(t)\in\boldsymbol{R}^n$是观测器的状态向量. 将设计 $K\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$(控制器反馈增益矩阵)和 $L\in\boldsymbol{R}^{n\times r}$(控制器观测增益矩阵)以确保闭环系统对于所有容许不确定性是二次稳定的.

引入观测器误差 $\boldsymbol{e}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t)$,复合式(1),(4)和(5)可得

$$\dot{\boldsymbol{e}}(t)=(A-LC+\Delta B(t)K)\boldsymbol{e}(t)+(\Delta A(t)-\Delta B(t)K-L\Delta C(t))\boldsymbol{x}(t)+$$

$$(A_1 + \Delta A_1(t))\boldsymbol{x}(t - d(t)) - (B_1 + \Delta B_1(t))K\boldsymbol{x}(t - h(t)) + (B_1 + \Delta B_1(t))K\boldsymbol{e}(t - h(t)). \tag{6}$$

基于以上描述，可以引入如下的系统可通过动态输出反馈进行二次镇定的定义：

定义1. 如果存在正定对称矩阵 $P_c, P_o, R_1, R_3, R_4 \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 和常数 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ 使得对于任意容许不确定性和 $(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{e}(t), t) \in \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$，Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{e}(t),t) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) \quad \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(t)]\begin{bmatrix} P_c & 0 \\ 0 & P_o \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{e}(t) \end{bmatrix} + \int_{t-d(t)}^{t} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)R_1\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s + \int_{t-h(t)}^{t} [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s) \quad \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(s)]\begin{bmatrix} R_3 & 0 \\ 0 & R_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(s) \\ \boldsymbol{e}(s) \end{bmatrix}\mathrm{d}s. \tag{7}$$

对时间 t 的导数满足条件

$$L(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{e}(t),t) \leqslant -\alpha_1\|x(t)\|^2 - \alpha_2\|\boldsymbol{e}(t)\|^2, \tag{8}$$

则称系统(1)—(3)是可通过动态输出反馈控制律进行二次镇定的．并且该控制律被称为鲁棒输出反馈镇定控制律．

3 鲁棒输出反馈镇定控制器设计

系统(1)—(3)可利用输出反馈控制律(4)，(5)进行二次镇定的条件可由下述定理给出：

定理1. 考虑系统(1)—(3)，$R \in \boldsymbol{R}^{m\times m}$ 是给定的正定对称矩阵，对于任意容许不确定性 $F(\cdot)$，如果存在常数 $\varepsilon > 0$ 和 $r > 0$ 使下述两个矩阵不等式

$$S_1 = A^{\mathrm{T}}P_c + P_cA - 2P_cBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P_c + P_cW_1P_c + Q_1 < 0, \tag{9}$$

$$S_2 = A^{\mathrm{T}}P_o + P_oA - 2rC^{\mathrm{T}}C + P_oW_2P_o + Q_2 < 0, \tag{10}$$

分别存在正定对称矩阵解 P_c 和 P_o，其中

$$W_1 = \varepsilon(H_0H_0^{\mathrm{T}} + 2M_0M_0^{\mathrm{T}} + 2M_1M_1^{\mathrm{T}} + A_1A_1^{\mathrm{T}} + H_1H_1^{\mathrm{T}} + BR^{-2}B^{\mathrm{T}} + 2B_1B_1^{\mathrm{T}}) + \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{1}{1-\rho_h}BR^{-2}B^{\mathrm{T}} + BR^{-1}N_0^{\mathrm{T}}N_0R^{-1}B^{\mathrm{T}} + \frac{1}{1-\rho_h}BR^{-1}N_1^{\mathrm{T}}N_1R^{-1}B^{\mathrm{T}}\right), \tag{11}$$

$$Q_1 = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2}{1-\rho_d}I + 2E_0^{\mathrm{T}}E_0 + \frac{2}{1-\rho_d}E_1^{\mathrm{T}}E_1 + E_2^{\mathrm{T}}E_2\right), \tag{12}$$

$$W_2 = \varepsilon(H_0H_0^{\mathrm{T}} + 2M_0M_0^{\mathrm{T}} + 2M_1M_1^{\mathrm{T}} + A_1A_1^{\mathrm{T}} + H_1H_1^{\mathrm{T}} + 2B_1B_1^{\mathrm{T}}), \tag{13}$$

$$Q_2 = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2}{1-\rho_h}P_cBR^{-2}B^{\mathrm{T}}P_c + 2P_cBR^{-1}N_0^{\mathrm{T}}N_0R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_c + P_cBB^{\mathrm{T}}P_c + \frac{2}{1-\rho_h}P_cBR^{-1}N_1^{\mathrm{T}}N_1R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_c\right) + \varepsilon r^2C^{\mathrm{T}}H_2H_2^{\mathrm{T}}C, \tag{14}$$

则此不确定线性时滞系统(1)—(3)被称为可通过动态输出反馈控制律进行二次镇定的．相应的动态输出反馈控制律如(4)，(5)所示，其中

$$K = R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_c, L = rP_0^{-1}C^{\mathrm{T}}.$$

基于上述结果，给出如下条件：

条件1. 如果对于给定常数 $\varepsilon > 0, r > 0$ 和任意容许不确定性，存在正定对称矩阵 $P_c \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 使不等式(9)满足，则称系统(1)—(3)满足条件1.

条件2. 如果对于给定常数 $\varepsilon>0$　$r>0$和任意容许不确定性，存在正定对称矩阵 $P_o\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$使不等式(10)满足，则称系统(1)—(3)满足条件2.

注1. 根据定理1，容易得出满足条件1和条件2的任意不确定线性时滞系统(1)—(3)是可通过动态输出反馈控制律二次镇定的. 因此条件1和条件2是确保系统(1)—(3)可通过动态输出反馈控制律二次镇定的充分条件.

考虑条件1，因 P_c 是正定对称矩阵，故它是可逆的，同时对式(9)两边左乘和右乘 P_c^{-1}，不等式(9)将转化为下述矩阵不等式：

$$F_1+\frac{2}{\varepsilon(1-\rho_d)}\overline{P}_c\overline{P}_c+\frac{1}{\varepsilon}\overline{P}_cF_2^{\mathrm{T}}F_2\overline{P}_c<0,\tag{15}$$

其中

$$\overline{P}_c=P_c^{-1},F_1=A\overline{P}_c+\overline{P}_cA^{\mathrm{T}}-2BR^{-1}B^{\mathrm{T}}+W_1,F_2^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}E_0^{\mathrm{T}} & \sqrt{\frac{2}{1-\rho_d}}E_1^{\mathrm{T}} & E_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

其中 W_1的定义见定理1所示.

下面定理给出输出反馈控制律(4)，(5)中的控制器反馈增益阵 K 存在的条件和设计方法.

定理2. 考虑不确定线性时滞系统(1)—(3)，对于给定的常数 $\varepsilon>0$和 $r>0$，该系统满足条件1的充要条件是存在正定对称矩阵 $\overline{P}_c\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$使下述线性矩阵不等式(LMI)成立

$$\begin{bmatrix}F_1 & \overline{P}_c & \overline{P}_cF_2^{\mathrm{T}}\\ \overline{P}_c & -\frac{\varepsilon(1-\rho_d)}{2}I & 0\\ F_2\overline{P}_c & 0 & -\varepsilon I\end{bmatrix}<0,\tag{16}$$

进一步，若此 LMI 优化问题有解 $\overline{P}_c$，则输出反馈控制律中的控制器反馈增益阵 K 为

$$K=R^{-1}B^{\mathrm{T}}P_c=R^{-1}B^{\mathrm{T}}\overline{P}_c^{-1},\tag{17}$$

证明. 使用 Schur 分解方法，可将式(15)等价转化成式(16)，定理得证.

考虑条件2，基于与上述类似的处理方法，易将不等式(10)转化为下述矩阵不等式：

$$F_1+\varepsilon P_oF_2F_2^{\mathrm{T}}P_o<0,\tag{18}$$

其中

$$F_1=A^{\mathrm{T}}P_o+P_oA-2rC^{\mathrm{T}}C+Q_2,$$

$$F_2=[H_0\quad \sqrt{2}M_0\quad \sqrt{2}M_1\quad A_1\quad H_1\quad \sqrt{2}B_1],$$

其中 Q_2的定义见定理1所示.

下面定理给出输出反馈控制律(4)，(5)中的控制器观测增益阵 L 存在的条件和设计方法，

定理3. 考虑不确定线性时滞系统(1)—(3)，对于给定的常数 $\varepsilon>0$和 $r>0$，该系统满足条件2的充要条件是存在正定对称矩阵 $P_o\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$使下述线性矩阵不等式(LMI)成立

$$\begin{bmatrix}F_1 & P_oF_2\\ F_2^{\mathrm{T}}P_o & -\frac{1}{\varepsilon}I\end{bmatrix}<0,\tag{19}$$

若此 LMI 优化问题有解 P_o，则输出反馈控制律中的观测器增益阵 L 为

$$L=rP_o^{-1}C^{\mathrm{T}}.\tag{20}$$

证明. 使用 Schur 分解方法,可将(18)式转化成(19)式,定理得证.

4 结论

本文重点研究了同时具有时变状态时滞和时变控制时滞的不确定线性时滞系统的鲁棒镇定问题,该不确定性是未知但有界的,并且不必满足匹配条件. 导出了通过基于观测器的动态输出反馈控制律实现系统鲁棒镇定的充分条件,并且输出反馈控制律可由两个 LMI 的求解来构造.

参 考 文 献

1 Choi H H. Riccati equation approach to the memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with delayed control. *Electron. Lett.* 1994,**30**:1100—1101

2 Su Hongye, Chu Jian, Wang Jingcheng. A memoryless robust stabilizing controller for a class of uncertain linear time-delay systems. *Int. J. Syst. Science*, 1998,**29**:191—197

3 Cao Y Y, Sun Y X. Robust Stabilization of Uncertain Systems with Multiple State Delay. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1998,**43**:1484—1488

4 Tseng C L, Fong I K, Su J H. Robust stability analysis for uncertain delay systems with output feedback controller. *Syst. Contr. Lett*, 1994,**23**:271—278

5 Zhu X D, Sun Y X. Observer-based robust stabilization of uncertain dynamic time-delay systems. *Control Theory and Applications*, 1996,**13**(2):254—258(in Chinese)

6 Li X, de Souza C. E. Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay. *Automatica*, 1997,**33**:1657—1662

7 Boyd S L, Tl Ghaoui, Feron E, Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. SIAM, Philadelphia, 1994

苏宏业　1969年生. 1990年毕业于南京化工大学,1995年获浙江大学工业自动化专业博士学位,现为浙江大学工业控制技术研究所副教授. 研究方向为鲁棒控制,非线性控制,时滞系统控制和 PID 自整定理论

王景成　1972年生. 1992年毕业于西北工业大学,1998年获浙江大学工业自动化专业博士学位,现在上海交通大学作博士后. 研究方向为 H_∞ 鲁棒控制,时滞系统控制.

周　凯　1973年生. 1995年毕业于西北工业大学,现为浙江大学工业自动化专业博士研究生. 研究方向为非线性控制,时滞系统控制.

褚　建　1963年生. 1982年毕业于浙江大学化工系,1989年获日本京都大学工学博士学位. 1993年被聘为浙江大学教授,博导,现为工业自动化国家工程研究中心副主任. 研究方向为时滞系统控制,非线性控制,鲁棒控制.