第25卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 25, No. 4
1999年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jul., 1999

短文

观测器型 H_∞ 控制器设计的 LMI 方法

席 斌 吴铁军
(厦门大学自动化系 厦门 361005) (浙江大学工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027)

摘 要 观测器型控制器由于其结构简单和物理意义明确而受到广泛重视. 在假定控制器为一般的动态补偿器情况下，利用 LMI 技术解 H_∞ 控制器使得未知参数较多且求取过程复杂. 现利用 LMI 技术研究观测器型 H_∞ 控制器，则控制器参数可通过三个 LMI 即可获得，这个 LMI 组的适定性问题用现有的工具软件即可确定.

关键词 线性矩阵不等式，观测器.

OBSERVER-BASED H_∞ CONTROLLER DESIGN: AN LMI METHOD

XI Bin
(*Department of Automation, Xiamen University Xiamen* 361005)
WU Tiejun
(*National laboratory for Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract Observer-based controller is widely accepted for its simple structure and explicit physical meaning. But the controller structure is often assumed as general compensator in the procedure of H_∞ controller synthesis by LMI technology. This has increased the number of unknown parameters and complicated the design procedure, moreover, the controller derived from this way is unclear in physical meaning. We investigate in this paper the LMI method to design H_∞ controller under the assumption of observer-based type. The final result is that controller parameters can be derived from three LMI's and the feasibility problem can be determined by existing tool box.

Key words H_∞ linear matrix inequality, observer.

1 引言

输出反馈 H_∞ 控制器的综合方法基本上有两种较为有效. 一种是 Doyle 等人于1989年提出的状态空间法[1]，这一方法的局限性在于它有一些众所周知的假设；另一种就是线

收稿日期 1997-09-29 收到修改稿日期 1998-09-08

性矩阵不等式(LMI)方法,除了要求系统是能稳定能检测以外,这一方法没有其余的假设.然而 LMI 方法所得到的仅仅是计算过程中的参数矩阵,控制器的物理意义不明确,而且为了得到控制器参数的显式表达的过程是十分烦琐的[2].有观点认为,LQG 理论之所以在六七十年代流行,其控制器的结构是原因之一,即一个线性控制器在结构上可分成状态观测部分和状态估计部分.为此本文研究了结构化 H_∞ 控制器设计的 LMI 方法,这一方法和以前的方法不同之处在于首先假设控制器具有观测器型结构,在控制器为严格正则的条件下,只有两个控制器参数需要确定,一个相当于状态反馈增益矩阵,另一个相当于观测器增益矩阵.最后的结果是通过三个 LMI 来获得控制器参数.

2 设计方法

设所研究的对象为线性、时不变、有限维,

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B_1\boldsymbol{w} + B_2\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{z} = C_1\boldsymbol{x} + D_{11}\boldsymbol{w} + D_{12}\boldsymbol{u},\\ \boldsymbol{y} = C_2\boldsymbol{x} + D_{21}\boldsymbol{w},\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是状态,$\boldsymbol{w}$ 是扰动,$\boldsymbol{u}$ 是控制输入,$\boldsymbol{z}$ 是被调变量,$\boldsymbol{y}$ 是测量输出.在假设系统是能稳定、能检测的情况下,H_∞次最优问题是设计一个线性控制器,使得:(i)闭环系统是内稳定的,(ii)$\boldsymbol{w}$ 到 $\boldsymbol{z}$ 的闭环传递函数的 H_∞范数小于某一给定正数 γ,根据引言所述,假设控制器具有观测器型结构,即控制器的模型为

$$\begin{cases}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = A\hat{\boldsymbol{x}} + B_2\boldsymbol{u} + L(\boldsymbol{y} - C_2\hat{\boldsymbol{x}}),\\ \boldsymbol{u} = -K\hat{\boldsymbol{x}},\end{cases} \tag{2}$$

其中 K 和 L 为需要确定的控制器参数.把(2)式代入(1)式得闭环系统状态方程为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & -B_2K\\ LC_2 & A - B_2K - LC_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \hat{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1\\ LD_{21}\end{bmatrix}\boldsymbol{w} = \widetilde{A}\widetilde{\boldsymbol{x}} + \widetilde{B}\boldsymbol{w},\\ \boldsymbol{z} = [C_1 \quad -D_{12}K]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \hat{\boldsymbol{x}}\end{bmatrix} + D_{11}\boldsymbol{w} = \widetilde{C}\widetilde{\boldsymbol{x}} + D_{11}\boldsymbol{w}.\end{cases} \tag{3}$$

根据有界实引理[3],(i)和(ii)成立等价于存在一正定对称矩阵 $P>0$,和 $Q=P^{-1}$使得

$$\begin{bmatrix}\widetilde{A}^{\mathrm{T}}P + P\widetilde{A} & P\widetilde{B} & \widetilde{C}^{\mathrm{T}}\\ \widetilde{B}^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm{T}}\\ \widetilde{C} & D_{11} & -\gamma I\end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix}Q\widetilde{A}^{\mathrm{T}} + \widetilde{A}Q & \widetilde{B} & Q\widetilde{C}^{\mathrm{T}}\\ \widetilde{B}^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm{T}}\\ \widetilde{C}Q & D_{11} & -\gamma I\end{bmatrix} < 0. \tag{4}$$

并且 $\gamma^2 I - D_{11}^{\mathrm{T}}D_{11} > 0$.

根据式(4),我们可以分别得到两个关于 $\overline{K}$ 和 $\overline{L}$ 的 LMI 以及一个反映耦合关系的 LMI.

定理1. 式(4)成立等价于存在两个正定对称矩阵 R 和 S,以及参数矩阵 $\overline{K}$ 和 $\overline{L}$ 满足

$$\begin{bmatrix}(A + B_2\overline{K})^{\mathrm{T}}R + R(A + B_2\overline{K}) & RB_1 & (C_1 + D_{12}\overline{K})^{\mathrm{T}}\\ B_1^{\mathrm{T}}R & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm{T}}\\ (C_1 + D_{12}\overline{K}) & D_{11} & -\gamma I\end{bmatrix} < 0, \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} S(A-\bar{L}C_2)^{\mathrm T}+(A-\bar{L}C_2)S & (B_1-\bar{L}D_{21}) & SC_1^{\mathrm T} \\ (B_1-\bar{L}D_{21})^{\mathrm T} & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm T} \\ C_1S & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix}<0, \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix}<0. \tag{7}$$

证明. 根据 $\tilde{A}$ 的结构，对 P 和 Q 进行适当的分块，

$$P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^{\mathrm T} & P_{22} \end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21}^{\mathrm T} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix},$$

由于 $P=Q^{-1}>0$，则根据 Schur 补定理[3]，

$$R=P_{11}-P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^{\mathrm T}>0,\quad S=Q_{11}-Q_{21}^{\mathrm T}Q_{22}^{-1}Q_{21}>0. \tag{8}$$

对式(4)第一式的首行和首列分别左乘$[I \quad -P_{12}P_{22}^{-1}]$和右乘$[I \quad -P_{12}P_{22}^{-1}]^{\mathrm T}$ 可得式(5)，对式(4)第二式的首行和首列分别左乘$[I \quad -Q_{21}^{\mathrm T}Q_{22}^{-1}]$和右乘$[I \quad -Q_{21}^{\mathrm T}Q_{22}^{-1}]^{\mathrm T}$ 可得式(6)，其中 $\bar{K}=KP_{22}^{-1}P_{12}^{\mathrm T}$，$\bar{L}=Q_{21}^{\mathrm T}Q_{22}^{-1}L$. 注意到 $Q_{11}=R^{-1}$，由式(8)可见 $RS=I-RQ_{21}^{\mathrm T}Q_{22}^{-1}Q_{21}$，又由于控制器的阶次和系统阶次相同，故 $Q_{21}(P_{12})$为非奇异矩阵，所以 $I-RS>0$，因此(7)式成立，证毕.

对于由式(5)，(6)，(7)所组成的 LMI 组，因为其中含有两个未知矩阵变量的乘积项，尚不能应用现有的工具软件来解，我们可以利用投影定理[3]来去掉其中一个矩阵变量，为此有以下引理和推论.

引理1[3]. LMI　$\Phi+E^{\mathrm T}XF+F^{\mathrm T}X^{\mathrm T}E<0$成立，当且仅当 $E_\perp^{\mathrm T}\Phi E_\perp<0$，$F_\perp^{\mathrm T}\Phi F_\perp<0$，其中 $E_\perp$和 $F_\perp$分别由 E 和 F 的垂直空间的基向量所组成.

推论1. LMI(5)和(6)等价于

$$[B^{\mathrm T} \quad 0 \quad D_{12}]_\perp^{\mathrm T}\begin{bmatrix} R^{-1}A^{\mathrm T}+AR^{-1} & B_1 & R^{-1}C_1^{\mathrm T} \\ B_1^{\mathrm T} & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm T} \\ C_1R^{-1} & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix}[B^{\mathrm T} \quad 0 \quad D_{12}]_\perp<0, \tag{9}$$

$$[C_2 \quad D_{21} \quad 0]_\perp^{\mathrm T}\begin{bmatrix} A^{\mathrm T}S^{-1}+S^{-1}A & S^{-1}B_1 & C_1^{\mathrm T} \\ B_1^{\mathrm T}S^{-1} & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm T} \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix}[C_2 \quad D_{21} \quad 0]_\perp<0. \tag{10}$$

证明. 以式(5)～(9)为例，式(5)可以整理为

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm T}R+RA & RB_1 & C_1^{\mathrm T} \\ B_1^{\mathrm T}R & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm T} \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} RB_2 \\ 0 \\ D_{12} \end{bmatrix}\bar{K}\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm T}+\begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\bar{K}^{\mathrm T}\begin{bmatrix} RB_2 \\ 0 \\ D_{12} \end{bmatrix}^{\mathrm T}<0. \tag{11}$$

从形式上看这是一个双边投影问题[3]，实际上是个单边投影问题，因为$[I \quad 0 \quad 0]$的垂直空间可以是$\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm T}$，则

$$\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{\mathrm T}R+RA & RB_1 & C_1^{\mathrm T} \\ B_1^{\mathrm T}R & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm T} \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\gamma I & D_{11}^{\mathrm T} \\ D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix}<0.$$

上式显然成立，故这一投影不产生任何约束. 如果$[B_2^{\mathrm T}R \quad 0 \quad D_{12}]$的垂直空间为 W_R，

$[B_2^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad D_{12}]$的垂直空间为 W，则根据引理，LMI(11)成立，当且仅当

$$W_R^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}R+RA & RB_1 & C_1^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}}R & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} W_R = W\begin{bmatrix} R^{-1}A^{\mathrm{T}}+AR^{-1} & B_1 & R^{-1}C_1^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}} & -\gamma I & D_{11}^{\mathrm{T}} \\ C_1R^{-1} & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} W < 0,$$

即(9)式成立，从(6)到(10)的证明类似，证毕.

推论2. $K=\overline{K}(S^{-1}-R)^{-1}P_{12}$，$L=Q_{21}(R^{-1}-S)^{-1}\overline{L}$，其中 P_{12}和 Q_{21}为 $I-R^{-1}S^{-1}$的非奇异分解.

证明. 因为

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21}^{\mathrm{T}} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{-1} & P_{12} \\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R^{-1} & Q_{21}^{\mathrm{T}} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

同时 $I-R^{-1}S^{-1}>0$，所以存在非奇异分解矩阵 P_{12}和 Q_{21}使得 $R^{-1}S^{-1}+P_{12}Q_{21}=I$，这可利用奇异值分解来实现，如果 $I-R^{-1}S^{-1}=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，$\Sigma>0$，则可令 $P_{12}=U\Sigma^{\frac{1}{2}}$，$Q_{21}=\Sigma^{\frac{1}{2}}V^{\mathrm{T}}$. 又因为 $R=S^{-1}-P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}$，所以 $P_{22}^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}=P_{12}^{-1}(S^{-1}-R)$，由式(8)可得 $K=\overline{K}(S^{-1}-R)^{-1}P_{12}$. 同样由 $S=R^{-1}-Q_{21}^{\mathrm{T}}Q_{22}Q_{21}$，$Q_{21}^{\mathrm{T}}Q_{22}^{-1}=(R^{-1}-S)Q_{21}^{-1}$可得 $L=Q_{21}(R^{-1}-S)^{-1}\overline{L}$，证毕.

3 结论

在假定控制器结构为观测器型的情况下，本文给出了用 LMI 求控制器参数的方法. 从推论1和2中就可以获得控制器参数的解，这是个 LMI 适定性问题，可由现有的工具软件来解.

参 考 文 献

1 Doyle J C, Glover K. Khargonekar P P, France B A. State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problem. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1989, **34**(8): 831—847

2 Gahinet P. Explict controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis. *Automatica*, 1996, **32**(7): 1007—1014

3 Gahint P, Apkarian P A. A linear matrix inequity approach to H_∞ control. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 1994, **4**: 421—448

席 斌 1963年出生，1995年5月在浙江大学控制系获博士学位，现在厦门大学自动化系任教，研究领域为鲁棒控制及其应用.

吴铁军 1950年出生，浙江大学控制系教授，工业控制国家重点实验室主任，博士生导师，研究领域为大系统的智能控制、非线性控制、鲁棒控制及其在复杂工业过程中的应用.