

短文

模糊控制的系统化设计和稳定性分析

张金明 李人厚

(西安交通大学系统工程研究所 西安 710049)

摘要 给出了一种模糊控制系统的系统化设计方法,它采用一组局部 T-S 模糊模型来表示模糊系统,对每个局部模型,利用状态反馈进行控制器设计,最后给出了全局模糊系统的稳定性分析.通过对一个典型的非线性球-棒控制系统的仿真研究,表明该方法是有用的,它的性能指标优于现有文献的结果.

关键词 模糊控制, T-S 模糊模型, 稳定性, 状态反馈.

STABILITY ANALYSIS AND SYSTEMATIC DESIGN OF FUZZY CONTROL

ZHANG Jinming LI Renhou

(Institute of Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

Abstract A method of stability analysis and systematic design of fuzzy control is presented in this paper. Fuzzy control system is denoted by a family of local T-S fuzzy model with aggregation. The controller is designed by state feedback for each local model. Finally, it is shown that this controller guarantees global stability of the closed-loop fuzzy system. The simulation result of a nonlinear control system—a ball and beam system—shows that this method is effective.

Key words Fuzzy control, T-S fuzzy model, stability, state feedback.

1 引言

近几年来,模糊控制在模糊集合论里,是最活跃和有成果的一个研究领域,它在工业过程和家用电器领域得到广泛应用.但就模糊控制设计而言,还存在两个弱点:一个是缺少理论化的指导系统设计方法;另一个是缺少稳定性分析.目前,对模糊控制进行稳定性分析的方法有:描述函数法,圆判据,相平面法和稳定区间法等,较多的稳定性分析是针对 T-S 模糊模型[1,2]. Tanaka^[1]所提出的方法是必须找到一个公共的正定矩阵 P ,才能镇

定系统. Cao^[2]针对这种方法的缺点,提出了用一组公共的正定矩阵 $P_j(j = 1, 2, \dots, m)$ 来代替公共的矩阵 P ,但他的反馈控制是基于线性不确定系统理论和方法设计的,不确定性的界不容易给出. 对于模糊控制器设计, Wang^[3]利用 Lyapunov 综合法设计了直接自适应模糊控制器, Tanaka 和 Cao 都是针对 T-S 模糊模型进行设计,但他们的方法所给出的结果都保守. 由于 T-S 模糊模型的后件是线性的,所以可以直接利用线性系统完善的理论结果.

基于以上分析,本文给出一种新的模糊控制的系统化设计方法,它借助于线性系统理论的状态反馈和极点配置技术,先对局部模型进行设计,然后,再对整个控制系统进行稳定性分析. 最后,给出一个非线性球-棒控制系统的仿真例子验证所提出的方法的有效性,所给出的性能指标优于文献[4]和[5].

2 模糊控制的系统化设计

2.1 模糊系统建模

在过去的十几年里,人们提出了各种模糊模型. 我们采用文献[1,2]所给的模糊模型,它既包含近似推理规则,又包含局部解析模型

$$R^k: \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^k \text{ AND } \dots x_n \text{ is } F_n^k \text{ THEN } \dot{x} = A_k x + b_k u \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (1)$$

这里 R^k 表示第 k 条近似推理规则, (A_k, b_k) 表示第 k 个局部模糊系统模型, m 是近似推理的规则数, $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$, $x \in R^n$ 是状态变量, $u \in R$ 是系统的输入变量.

对于未知动态系统,需要经过辨识才能确定模型的 (A_k, b_k) . 因此,可以假定模型(1)是已知的. 让 $\mu_k(x) = \mu_k(t)$ 表示推理模糊集 F^k 的归一化隶属函数,每条规则为乘积推理,

$$F^k = \prod_{i=1}^n F_i^k, \text{ 且 } \sum_{k=1}^m \mu_k = 1, \text{ 对状态空间进行划分,划分成 } m \text{ 个子空间,它满足 } S_k =$$

$$\{x | \mu_k(x) \geq \mu_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m, i \neq k\}. \text{ 定义特征函数 } \eta_k = \begin{cases} 1, & x \in S_k, \\ 0, & x \notin S_k, \end{cases} \sum_{k=1}^m \eta_k = 1, \text{ 则构造}$$

全局模型

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^m \eta_k A_k x + \sum_{k=1}^m \eta_k b_k u = \sum_{k=1}^m \eta_k (A_k x + b_k u). \quad (2)$$

这里,模糊系统采用单点模糊化、乘积推理、极大去模糊化方法.

2.2 模糊控制器设计

对于(2)式给定的模糊系统,首先,基于局部模型设计局部状态反馈控制器;然后,通过模糊推理选择占优的子系统作用于模糊系统.

如果模糊系统是局部能控的,也就是 $(A_i, b_i) i = 1, 2, \dots, m$ 是能控对,那么反馈控制增益可以通过 Ackermann's 公式获得. 具体步骤如下:

$$\text{局部模型} \quad \dot{x} = A_i x + b_i u, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

$$\text{反馈控制} \quad u = -k_i x, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

我们可以借用线性系统理论的方法,对 $(A_i - b_i k_i)$ 的特征值进行任意配置. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 是方程 $\alpha(s) = s^n + \alpha_n s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s + \alpha_1$ 的 n 个特征根,也就是我们所期望的配置特征值,该方程也就是所期望控制的特征方程. 由 Ackermann's 公式直接得 k_i , 即 $k_i =$

$[0 \cdots 0 \ 1] \theta_i^{-1} \alpha(A_i)$, 其中 $\theta_i = [b_i \ A_i b_i \ A_i^2 b_i \ \cdots \ A_i^{n-1} b_i]$, $\alpha(A_i)$ 为方程 $\alpha(A_i) = A_i^n + \alpha_n A_i^{n-1} + \cdots + \alpha_2 A_i + \alpha_1$ 的解. 令 $\bar{A}_i = A_i - b_i k_i$, Q_i 是一组对称正定矩阵, 则存在唯一的一组对称正定 P_i 满足 Lyapunov 方程的解. 即

$$\bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i = -Q_i, \quad (5)$$

因此, 闭环模糊系统为 $\dot{x} = \sum_{i=1}^m \eta_i A_i x - \sum_{i=1}^m \eta_i b_i k_i x = \sum_{i=1}^m \eta_i \bar{A}_i x$. (6)

3 模糊系统稳定性分析

从上节的模糊控制器设计中, 可以看到, 首先, 利用局部反馈和极点配置技术, 保证每个局部 T-S 模糊模型是稳定的. 然后, 用这些局部模型构成一个模糊系统. 当然, 一般而言, 局部稳定不能保证全局稳定. 因此, 我们必须对设计的模糊系统进行稳定性分析, 否则, 难于保证全局模糊系统的稳定性.

定理1. 如果模糊系统如(1)和(2)式所描述, 且 (A_k, b_k) 是局部能控对, 进行局部状态反馈(4)后, 则闭环模糊系统(6)是稳定的.

为了证明此定理, 我们利用文献[6]构造分段光滑 Lyapunov 函数(Piecewise Smooth Lyapunov Functions)的思想, 来证明定理1.

证明. 令 $P = \sum_{i=1}^m \eta_i P_i$, P_i 满足 Lyapunov 方程(5)的解. 构造 Lyapunov 函数 $V = x^T P x$, 则 $V = x^T (\sum_{i=1}^m \eta_i P_i) x = \sum_{i=1}^m \eta_i x^T P_i x = \sum_{i=1}^m \eta_i V_i$ 其中 $V_i = x^T P_i x, x \in S_i \subset R^n$.

当 $x \in S_i$ 且 $x \neq 0$ 时, V 是连续可导的. 当 x 处于边界时, 即 $x \in S_i \cap x \in S_j, i \neq j$ 时, 尽管 V 不可导, 但这不影响我们对问题的讨论, 因为只在边界点上, 只要保证状态 x 从 S_i 子空间迁移到 S_j 子空间时有 $V_i \geq V_j$. 当 x 不在边界时, 有

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^m \eta_i \dot{V}_i, \quad (7)$$

$$\dot{V}_i = \dot{x}^T P_i x + x^T P_i \dot{x} = x^T (\bar{A}_i^T P_i + P_i \bar{A}_i) x = -x^T Q_i x \leq 0,$$

所以 $\dot{V} = \sum_{i=1}^m \eta_i \dot{V}_i \leq 0$, 从而定理得证.

定理2. 如果模糊系统满足定理1的条件, 则闭环模糊系统是指数稳定的.

证明. 定义 $\alpha \triangleq \min_i \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)}$, ($\lambda_{\min}(x)$ 表示取矩阵 X 的最小特征值, $\lambda_{\max}(x)$ 表示取矩阵 x 的最大特征值.), 由于 Q_i 和 P_i 是正定对称矩阵, 因此, 可以清楚地看到 $\alpha > 0$, $\frac{\dot{V}_i}{V_i} = -\frac{x^T Q_i x}{x^T P_i x} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} \leq -\min_i \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} = -\alpha, x \in S_i$, 从而得 $\dot{V}_i \leq -\alpha V_i$, 代入(7)式得

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^m \eta_i \dot{V}_i \leq -\alpha \sum_{i=1}^m \eta_i V_i = -\alpha V.$$

由 Bellman-Gronwell 引理, $V(x) \leq \exp(-\alpha t) V(x_0) = \exp(-\alpha t) x_0^T P x_0, x_0 \in S_i$ 因此, 模糊闭环系统是大范围指数稳定的.

4 仿真

我们选择文献[5]中的球-棒系统作为仿真例子,在棒的转动中心施加一个力矩以后可使棒在垂直平面上转动,球则始终作自由滚动,要求球-棒保持接触状态.它可用如下状态方程表示:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ B(x_1 x_4^2 - G \sin x_3) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

x_1 表示球在棒上的位置, x_2 表示球在棒上的滑动速度, x_3 表示棒与水平方向的夹角, x_4 表示棒的转动角速度.我们的控制任务是求出一个 $u(x)$ 使得闭环系统的输出在某一区域内能从任意的初始条件收敛到零.选择6条模糊规则,建立如(1)式所示的局部解析模型.对于每个局部模型的闭环极点的选取根据所需要的性能指标而定,它们都被置成临界阻尼情况和4—5s的调整时间,从而由(4)式求得每个局部模型的反馈增益.

为了便于比较,参数与初始值的选择和文献[4,5]相同,它们分别取为 $B=0.7143$, $G=9.81\text{m/s}^2$, $\mathbf{x}(0) = [2.4, -0.1, 0.6, 0.1]^T$; $[1.6, 0.05, -0.6, -0.05]^T$; $[-1.6, -0.05, 0.6, 0.05]^T$; $[-2.4, 0.1, -0.6, -0.1]^T$. 仿真结果见图1、图2.图1的结果是使用文献[5]中的输入-输出线性化算法在四种不同初始条件下的输出;图2的结果是使用本文所提出的方法在四种不同初始条件下的输出;从图中可以看到,本文方法和文献[5]相比,从相同的初始条件收敛到零所需的时间短,偏离平衡点的幅度小.

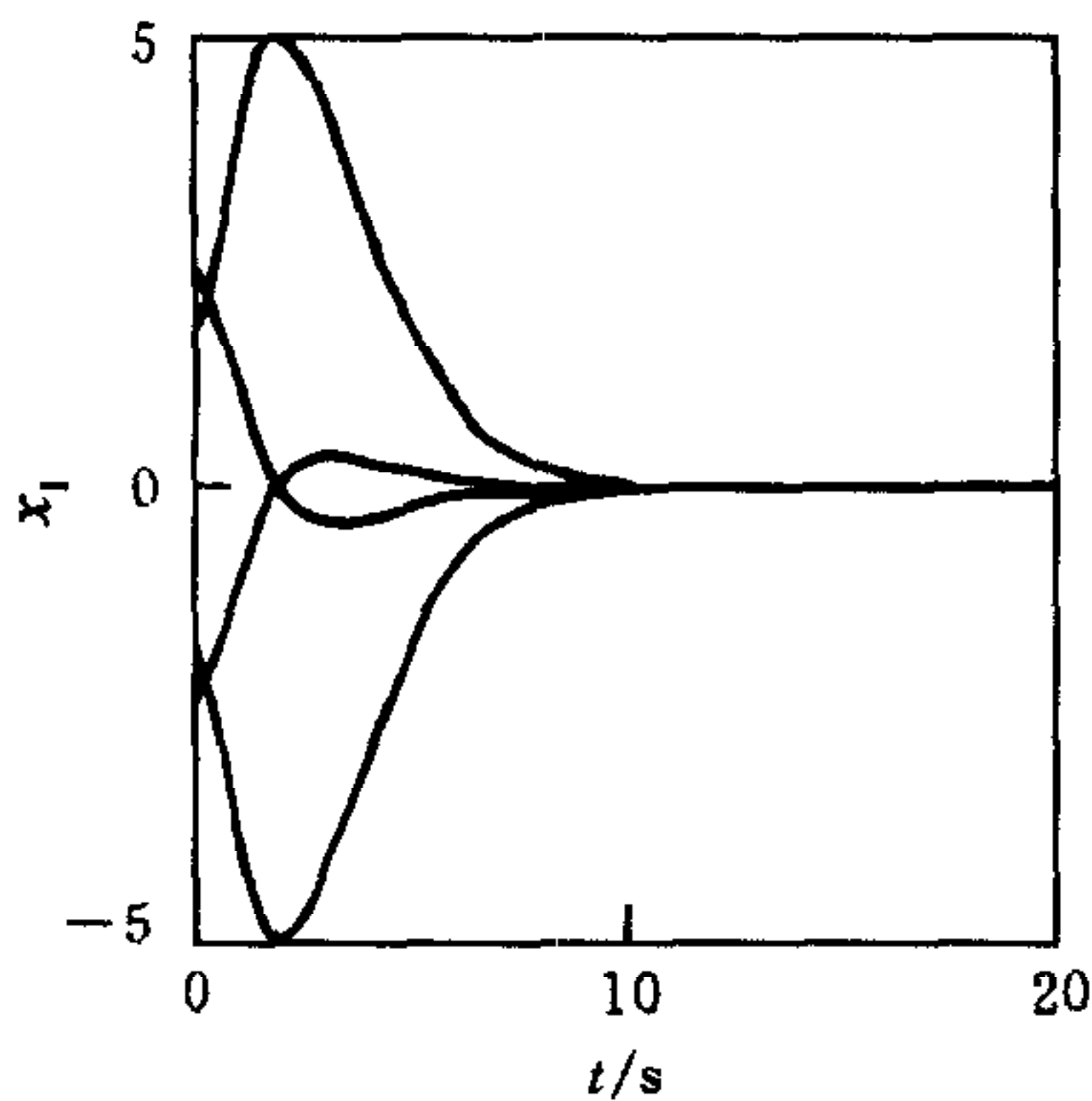


图1 文献[5]输入-输出线性化方法仿真结果

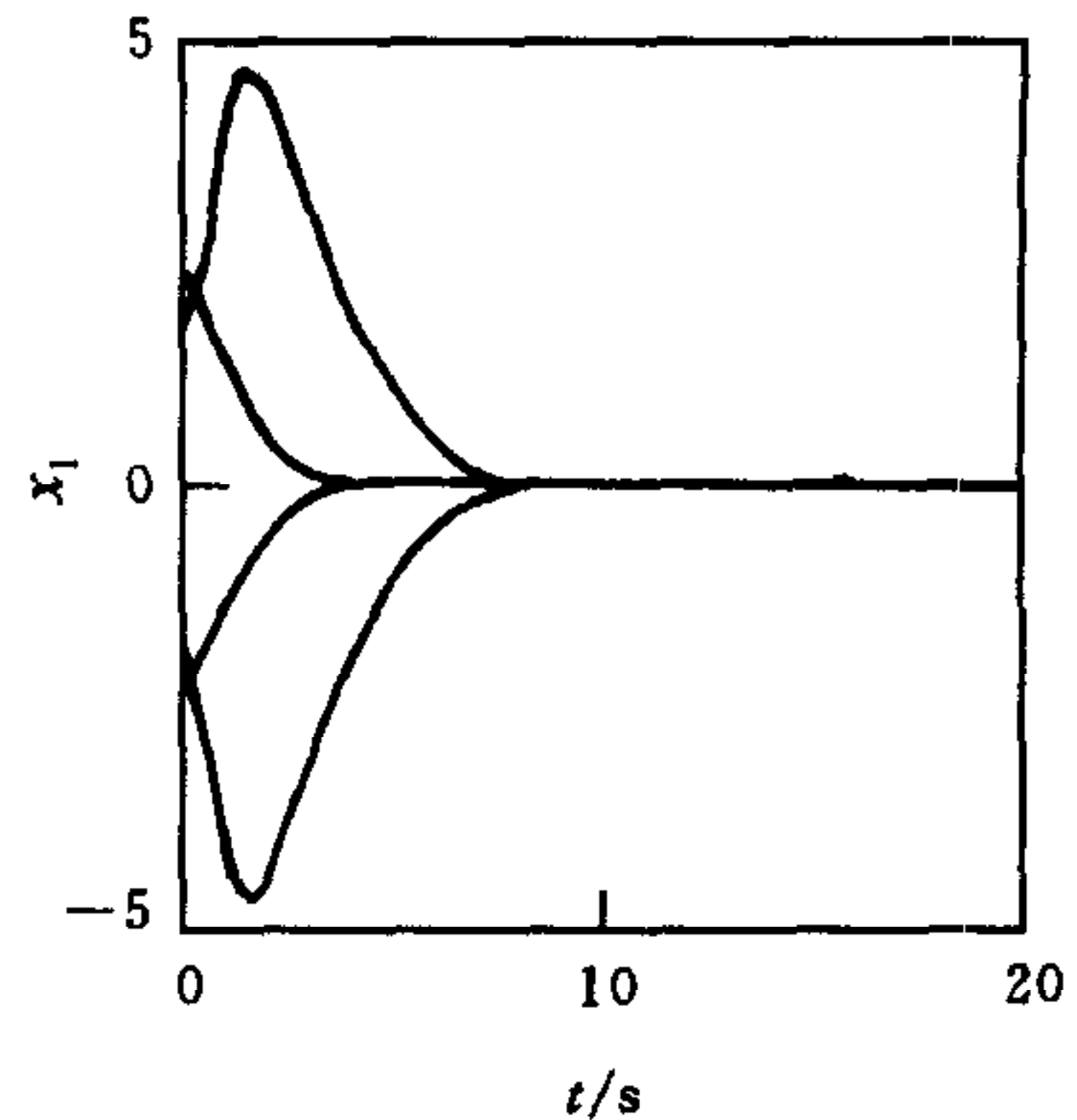


图2 本文方法仿真结果

从模糊控制器设计方法而言,和文献[4]相比较,我们的模糊控制器设计仅用了6条规则,而它用了20条规则,且它需要借助文[5]的输入-输出线性化算法,它的性能指标最多达到文[5]的性能指标.本文的方法所采用的规则少于文[4],而性能高于它.因此,本文的模糊控制器设计方法更有效.

5 结论

本文所给出的一种模糊控制的系统化设计方法,从设计到稳定性分析简洁明了.利用一组局部状态模型来表示模糊系统,对每个局部模型,利用状态反馈进行控制器设计,最后给出了全局模糊系统的稳定性分析.这使得我们可以在较短的时间内进行很好的控制器设计.在模糊控制器设计时,克服了以往模糊控制器设计主要依赖个人操作者的经验,而导致模糊控制器的性能随设计者的不同而不一致.对一个非线性球-棒控制系统的仿真研究结果表明,本文提出的方法所得到的性能指标优于文[4]和[5].因此,这是一种有效的、高性能的模糊控制系统化设计方法.

参 考 文 献

- 1 Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, **45**(2):135—156
- 2 Cao S G, Rees N W, Feng G. Quadratic stability analysis and design of continuous-time fuzzy control systems. *Int. J. Systems Science*, 1996, **27**(2):193—203
- 3 Wang Li-Xin. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 1993, **1**(2):146—155
- 4 Wang Li-Xin. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning. *IEEE Trans. Neural Networks*, 1992, **3**(5):807—814
- 5 Hauser J, Sastry S S, Kokotovic P. Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, **37**(3):392—398
- 6 Utkin V I. *Sliding Modes in Control Optimization*. New York:Springer-Verlag,1992

张金明 西安交通大学系统工程研究所博士研究生.研究领域为模糊控制和模糊系统稳定性,变结构控制等.

李人厚 西安交通大学系统工程研究所教授,博士生导师.研究领域为智能控制,复杂系统建模与控制等.